INTÉRÊTS SCIENTIFIQUES

de Fabio Gavarini

Dernière mise à jour: 5 Novembre 2024

— — —

Thèmes de recherche

Mes intérêts scientifiques jusqu'à aujourd'hui ont tourné autour de la théorie des représentations, les théories de Lie et leur quantification: algèbres de Lie, groupes de Lie, groupes algébriques et leur représentations, théorie des invariants, espaces homogènes, théories quantiques, etc. Dans ce domaine tres vaste, mon activité de recherche a eté concentrée sur trois sillons principaux: groupes algébriques et leur représentations, groupes quantiques, algèbres de Hopf et leurs généralisations. Ci-dessous j'esquisse un bref resumé de mes résultats sur tout cela (*Remarque:* les sigles alphanumériques en crochets se réfèrent à la liste de publications qui suit).

Groupes Algébriques, Représentations et sujets liés: Dans le vaste domaine de la théorie des groupes algébriques et son côté de théorie des représentations, j'ai principalment visé autour de deux sillons principaux: théorie des invariants classique, et théorie des supergroupes (algébriques).

Théorie des Invariants Classique: En théorie des invariants pour les groupes classiques, un rôle central est joué par la dualité de Schur-Brauer-Weyl: celle-ci lie les représentations irreductibles d'un tel groupe aux représentations irreductibles de l'algèbre $A(m)$ centralisante de l'action du groupe lui-même sur $V^{\otimes m}$, où V est la représentation naturelle (sur $\mathbf{C}$) du groupe. Pour $GL(V)$ ou $SL(V)$, l'algèbre $A(m)$ est un quotient de l'algèbre de groupe du groupe symètrique sur m elements; si l'on représente ce dernier comme un ensemble de graphes, et son produit comme "composition graphique", on obtient une description combinatoire de $A(m)$. Dans le cas des groupes orthogonaux ou symplectiques par contre, $A(m)$ est quotient de l'*algèbre de Brauer*: celle-ci a pour base un semigroupe de graphes qui étend le groupe symètrique, et admets encore une description combinatoire convenable. Cette théorie, depuis un siècle deshormais, montre une importance centrale en théorie des représentations des groupes classiques, et revient cycliquement à l'attention des specialistes du secteur en raison de son intérêt intrinseque et parce que il y a encore (depuis longtemps) beaucoup de problèmes classiques à resoudre.

En ce contexte, l'article [2] utilise la dualité dont on parlait pour étudier le sousmodule $T^k\big(V^{\otimes m}\big)$ des tenseurs de valence k en $V^{\otimes m}$; justement, comprendre la structure de cet espace est l'un des problèmes à résoudre cités ci-dessus. Le résultat en [2] est une description de $T^k\big(V^{\otimes m}\big)$ comme représentation induite, pour l'algèbre de Brauer, à partir d'une représentation plus simple. Comme sous-produit, cette description, qui au fond est combinatoire, fournit une nouvelle preuve de la formule de restriction de Littlewood (pour tout m assez grand) pour décrire la restriction à $SP(V)$, ou bien à $O(V)$, d'un module irreductible pour $GL(V)$. L'analyse et les résultats ci-dessus sont ameliorés en [5], où une description combinatoire plus fine de l'algèbre de Brauer et des ses modules indecomposables nous mène à une nouvelle preuve d'une version plus forte de la formule de restriction de Littlewood, ce qui ameliore en particulier le résultat trouvé par Littlewood lui-même au 1944 pour le groupe orthogonal. Avec les mêmes techniques, en [26] on décrit une grande partie du radical de l'algèbre de Brauer, et de même pour ses modules indecomposables.

Supergroupes: En géométrie classique, les groupes de symétrie interessants sont les groupes de Lie (dans le contexte differentiel) ou les groupes algébriques (dans le cadre algébrique). En supergéométrie, ceux-l sont remplacés par les supergroupes de Lie ou algébriques: on peut définir les objets des deux types avec le langage de la topologie (ce qui souligne mieux les aspects sous-jacents de géométrie classique), ou en termes de foncteurs des points (ce qui se prête au mieux pour plus amples généralisations). Ces supergroupes sont strictement liés aux superalgbres de Lie, via le super-analogue des théorèmes de Lie qui relient les groupes de Lie et les algèbres de Lie dans le cadre classique. Neanmoins, l'étude des superalgèbres de Lie est en quelque sorte plus facile — et on l'a poussé beaucoup plus loin — que celui des supergroupes. En particulier, la classification (et la théorie de structure) des supergroupes est beaucoup moins avancée que celle des superalgèbres de Lie: en fait, même la construction d'exemples est pas mal plus problématique.

En ce contexte, avec les articles [29], [30], [31], [32], [33] et [31-Cor] on avance d'un pas dans la direction de (une espèce de) programme de classification pour les supergroupes algébriques "simples" (en gros). En fait, dans ceux-là on démontre théorèmes d'existence pour tout supergroupe algébrique connexe dont la superalgèbre de Lie soit simple. On rappelle que ces superalgèbres-là (simples, de dimension finie), dont la classification est bien connue, se partagent en deux classes: celles de type classique — qui sont le superanalogue (au sens approprié), des algèbres de Lie complexes simples de dimension finie, ou des algèbres de Kac-Moody affines complexes — et celles de type Cartan.

En détail, dans les articles [29] et [33] on obtient un tel résultat d'existence pour le cas classique, moyennant une construction directe, concrète, qui imite celle classique par Chevalley qui donne tout groupe algébrique connexe simple dont l'algèbre de Lie tangente soit semisimple. En fait, on part d'une superalgèbre de Lie classique et une représentation simple de celle-ci: les supergroupes algébriques souhaités sont alors donnés comme sousgroupes (dans le supergroupe linéaire général sur l'éspace de représentation) engendrés par les "supersousgroupes à un paramètre" attachés aux vecteurs racine dans la superalgèbre de Lie elle-même. En particulier, cette construction fournit un traitement unifiant pour la plupart des supergroupes algébriques dejà connus en literature; en plus, cela donne une recette explicite pour construir des nouveaux exemples. En outre, ces supergroupes-là sont construits comme "superschémas en groupes" sur $\mathbf{Z}$. Par contre en [30] — actes d'une conférence — on donne une présentation raisonnée synthétique de cette même construction, et par dessus le marché on montre aussi comment on peut étendre à d'autres contextes la méthode ci-décrit.

Certains "supergroupes de Chevalley" particuliers (précisément ceux du type $D(2,1;a)$, maintenant vus comme supergroupes de Lie complexes) sont étudiés encore en [38]. En gros, les superalgèbres de Lie de type $D(2,1;a)$ forment une famille à un paramètre dont les éléments sont (superalgèbres de Lie qui sont) simples pour toute valeur du paramètre sauf un nombre fini: dans ce travail nous montrons que la construction des supergroupes de Lie associés a encore du sens pour ces valeurs "singulières" aussi, ce qui nous mène à supergroupes non-simples que nous décrivons un peu en détail. Ceci peut être obtenu par plusieurs méthodes (qui donnent résultats differents dans le cas singulier), dont cinq sont presentées en détail; en faisant cela, nous comparons aussi l'approche de Scheunert avec celle (plus largement suivie en literature) de Kac.

Ensuite, en [32] on démontre une sorte de résultat inverse de ceux en [29]: notamment, on montre que tout supergroupe algébrique connexe dont la superalgèbre de Lie tangente soit classique est forcement isomorphe à un supergroupe de Chevalley du type consideré en [29].

Avec techniques et strategie entièrement analogues, en [31] on démontre un théorème d'existence et unicité — à isomorphisme pres — analogue pour supergroupes algébriques (connexes) dont la superalgèbre de Lie tangente soit de type Cartan; en particulier, le cas de type $W(n)$ est examiné un peu plus plus en détail. Le même sujet est traité à nouveau dans [31-Cor], où on corrige une faute dans [31] et on éclaircit plus en profondeur un passage de la construction principale.

En [36] je m'occupe du problème plus général d'étudier un supergroupe algébrique (affine) via sa super-couple de Harish-Chandra associée - à savoir, la donnée de son groupe algébrique classique sous-jacent et sa superalgèbre de Lie tangente. Ceci est un sujet clé en théorie des supergroupes, qui est traité par plusieurs autheurs de manières différentes; à mon tour je présente une autre approche encore, strictement liée à l'existence de "scindements globaux" pour supergroupes (affines). En gros, pour une supervarieté celle-ci est la proprieté de se scinder en produit direct d'une varieté (algébrique) classique et une supervarieté totalement impaire — bref, une factorisation globale du type "$\underline{\textit{pair(e)}} \times \overline{\textit{impair(e)}}$": bien que ceci ne soit pas le cas pour toute supervarieté générale (cela marche toujours localement, mais globalement peut rater), il est vrai par contre — sous faibles hypothèses — pour les supergroupes affines. La question parallèle est traitée en [39] et [E3] pour les supergroupes de Lie (de type réel lisse, réel analytique ou complexe holomorphe qu'ils soient) à la place des supergroupes algébriques: à savoir, on prouve l'équivalence des supergroupes de Lie et supercouples de Harish-Chandra en donnant deux nouvelles méthodes fonctorielles pour construire, à partir d'une supercouple de Harish-Chandra donnée, un supergroupe de Lie adroitement conçu. L'une de ces méthodes est (essentiellement) la même que dans [36], mais adaptée au contexte differentiel (avec pas mal de technicismes critiques à gérer); l'autre par contre est nouvelle — et peut, à l'envers, être adaptée au domaine algebro-géométrique aussi.

En [43] on attaque l'étude des formes réelles — et en particulier de celles *compactes* (dans un sense convenable) — des superalgèbres de Lie et supergroupes complexes, et l'on montre que la situation en effet est plus riche que dans le cas classique: en fait, au delà de la généralisation directe de la notion de forme réelle (du cas classique au cas super) — qu'on appelle "standard" — il y en a une seconde — dite "graduée" — qui n'a pas une contrepartie directe classique. En ce sens, le passage au contexte super justement dévoile, de manière inattendue, une situation fort plus riche. L'étude des paires symétriques (et des super-éspaces symétriques associés) realisé en [45] est aussi bien lié avec tout ceci.

Sur une note differénte, [46] est par contre un travail plutôt "excentrique", indépendant, qui traite la quantisation géométrique, dans un contexte super-Kähler, pour les supergroupes de Lie abeliens.

Finalement, en [49] on traite un sujet encore différent: précisément, on introduit une classe speciale de superbigèbres de Lie (éventuellement avec structure super banale, donc tout simplement bigèbres de Lie), dénommées "algèbres GaGa", caractérisées par le fait d'avoir une sous-superbigèbre (paire) biabelienne que agit et coagit diagonellement, de manière à ce que la superbigèbre même se décompose en somme directe de souséspaces remarquables (en tant que "éspaces poids & copoids"). Pour cettes superbigèbres de Lie particulières on peut donner une description combinatoire assez précise ("à la Kac–Moody", en bref), et la théorie de déformations — par torseur ou par 2–cocycle — est fort interessante: toutes les deux cettes lignes de recherche sont introduites et développées dans ce travail. En plus, on montre comme beaucoup de classes de superbigèbres de Lie bien connues rentrent dans ce contexte, ainsi peuvent être traitées comme exemples particuliers (non banales!) d'algèbres GaGa qui "existent en nature", et donc entraînent l'introduction d'une notion générale nouvelle qui inclue et étende tous ces exemples particuliers.

Groupes Quantiques: Les groupes quantiques sont deformations algébriques, dans la categorie des algèbres de Hopf, d'algèbres enveloppantes universelles d'algèbres de Lie, nommées *algèbres enveloppantes universelles quantifiées (QUEA dans la suite)*, ou d'algèbres de fonctions de groupes algébriques ou groupes de Lie, nommées alors *algèbres de fonctions quantifiées (QFA dans la suite)*. Introduits au 1985 comme "symmetries quantiques", ils se sont ensuite montrés fort intéressant aussi pour l'étude des groupes algébriques en characteristique positive, et leur représentations, ou pour la théorie des nœuds, et autre encore. En outre, ils sont strictement liés à la théorie géométrique qu'on en obtient comme limite semiclassique ou, vice-versa, qu'ils quantifient, à savoir celle des groupes (algébriques ou de Lie) de Poisson et des bigèbres de Lie, et, plus en général, à la géométrie des varietés de Poisson.

Mes contributions en ce domain se partagent en quatre sillons.

<u>*QFA=QUEA*</u>: La *"équivalence" entre QUEA et QFA* est le premier sillon.

En [0] et [3], à partir des groupes quantiques mieux connus, construits sur les algèbres de Lie semisimples, avec structure de Poisson standard sur les groupes associés, j'introduis des groupes quantiques pour les groupes de Poisson duaux: les données de départ sont les QUEA de Jimbo (et Drinfeld) et leur formes entières, restreintes et non restreintes. En prenant les premières ou les deuxièmes, les limites semiclassiques correspondantes sont, respectivement, des algèbres enveloppantes universelles de bigèbres de Lie ou algèbres de fonctions de groupes de Poisson: ceci est l'idée fondamentale, qui s'applique aussi au cas des algèbres de Hopf duales des QUEA de départ, donnant ainsi les groupes quantiques "duaux" dont ci-dessus. L'analogue de ce travail pour les algèbres de Kac-Moody affines est fait en [7]; la clé là est un théorème à la Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) pour les formes entières restreintes des QUEA affines, qui est enoncé est demontré en [6].

En [4] on fait une construction similaire (duale) à celle de [0] et [3], mais plus concrete, à partir des QFA associées à $SL(n)$ ou $GL(n)$, pour lesquelles on connait une présentation par générateurs et relations via "q–matrices"; un autre résultat dans cet article est un théorème PBW pour la QFA sur $SL(n)$. Ces résultats sont ameliorés en [23] et [24].

Pour le cas de $SL(n)$, penser à la QUEA correspondante comme une QFA nous permet d'en donner une présentation alternative: ceci est le contenu de [19], où l'on donne une telle présentation en termes de "q–matrices", tout en fournissant ainsi une approche alternative à la présentation via L–operateurs due à Faddeev, Reshetikhin et Takhtajan.

Un développement ultérieur de quelques aspects de [4] est l'article [25]: on y démontre certains théorèmes à la Poincaré-Birkhoff-Witt pour les QFA associées à $Mat(n)$, à $GL(n)$ ou à $SL(n)$, et pour leur specialisations aux racines de l'unité. Comme corollaire, on obtient aussi des résultats interessants sur la structure d'algèbre de Frobenius de dites QFA aux racines de l'unité.

Finalement, un autre developpement de toutes ces constructions est traité dans [41], où des QUEAs "multiparamétriques" sont prises en compte, aussi bien que leurs formes intégrales et leurs specializations aux racines de l'unité, avec résultats analogues à ceux dejà connus dans le cas uniparametrique.

QDP: Le *principe de dualité quantique*, dans la suite QDP, est l'idée-guide du deuxieme sillon, et explique les résultats du premier. Dans la formulation originelle de Drinfeld, le QDP nous donne une équivalence de catégories entre les QUEA et les QFA, pour groupes quantiques définis (en tant qu'algèbres de Hopf) sur $\mathbf{k}[[\hbar]]$, avec $\mathbf{k}$ un corps, et topologiquement complets: en [12] on donne une preuve complete et détaillée de ce résultat, la première en litterature. En [E1] et [22] par contre on donne une suite à cette idée, en formulant une version plus forte du QDP pour algèbres de Hopf définies sur anneaux tres généraux et sans conditions topologiques additionnelles. Précisément, on montre que les recettes de Drinfeld établissent deux endofoncteurs de la catégorie de ces algèbres de Hopf, lesquels mettent en œuvre une correspondence de Galois, dans laquelle ces foncteurs ont comme images la souscatégorie des QUEA et des QFA respectivement. De plus, QUEA et QFA sont exactement les souscatégories des objets fixés par la composition des deux foncteurs. Vue la diversité des contextes, les tecniques utilisées en [12] et en [E1], [22] sont fort différentes.

D'un coté, [E1] est un essai tres étendu, enrichi avec beaucoup d'exemples et applications, de l'autre [22] est l'article sur revue qui traite tout juste le résultat principal, central de [E1], à savoir le théorème qui exprime la version plus forte du QDP espliquée cidessus. Soit [9], soit [11] — actes de conférences — sont versions abregées de [E1], chacune agrémentée avec un exemple originel. Par contre [E2] — notes pour une école d'été — est une présentation des résultats de [E1] et [22], moyennant nombre d'exemples explicits et applications.

Plus en général, une application directe du QDP aux algèbres de Hopf definies sur un corps nous apporte le principe de dualité crystallin, ou CDP en bref. On peut égalment obtenir cela par des moyens classiques — c'est à dire, sans se mêler aux groupes quantiques — de manière que cela se lit comme un chapitre de théorie classique des algèbres de Hopf. Les travaux concernants cela sont [15], [16] et [17]: pour plus de détails, voir la section CDP en "Algèbres de Hopf et structures liées" ci-dessous. La discussion générale est completée par [47], où l'on analyse l'interaction entre le QDP et les procédures de déformation (au sens de la théorie de Hopf) des QUEA par twist et par 2-cocycle.

Un cas intéressant de QDP dans un contexte de dimension infinie est étudié dans [42], où l'on considère un analogue "continu" de la QUEA (polynomiale et/ou formelle) associée a un'algèbre de Kac-Moody. Dans ce domain on ne peut pas appliquer directement la théorie générale, ma une analyse directe nous permet d'obtenir un résultat final qui est tout à fait analogue a celui du cas de dimension finie.

Un développement supplementaire est [18], où l'on énonce et démontre un QDP pour espaces homogènes, ou pour les sousgroupes correspondants. Comme application, on calcule une quantification explicite d'une importante structure de Poisson sur l'éspace des matrices de Stokes; une version plus brève (pour exposé) de ce travail est [21], où l'on présente aussi des nouvelles applications et exemples. Une version de cet article en termes de groupes quantiques *globaux* est développée en [35], où en plus on considère plusieurs versions de "quantification" pour sousgroupes; on peut traiter alors aussi les sousgroupes non-coisotropes, et pourtant nos résultats montrent qu'au final ceux qui sont coisotropes jouent forcement un rôle clé. Enfin, on étend ces idées au contexte des éspaces homogènes *projectifs*, en étudiant l'exemple des varietés de Grassmann en [28] et le cas général en [27].

Dans une autre direction encore, en étudiant déformations (par torseur ou par 2–cocycle, au sens de la théorie des algèbres de Hopf) de groupes quantiques, en [47] on montre comment le QDP soit la raison profonde pour laquelle il est possible introduire une construction de "déformations par *torseur polaire*, respectivement par *2–cocycle polaire*", pour les QUEA, respectivement pour les QFSHA. Ceci permet d'étendre de manière non banale les constructions habituelles, standard, de la théorie de Hopf, si bien qu'on introduit des nouveaux outils pour la théorie des déformations des groupes quantiques.

Enfin, en [34] on explore la possibilité d'étendre tout ce paquet d'idées au contexte des "groupoides quantiques", i.e. quantifications de bigébroides: ici la notion de bigébroide est une généralisation convenable de celle de bigèbre, on traite avec la quantification au sens formel et, au niveau semiclassique, les (bi)gèbres de Lie sont remplacées par les (bi)gèbres de Lie-Rinehart — parfois dites simplement "(bi)gébroides de Lie". En particulier, on developpe une forme convenable de QDP pour ces objets (en montrant aussi cela "à l'œuvre" dans un exemple precis).

R-MAT: *R–matrices et tressages* sont le sujet du troisième sillon de recherche. La notion de R–matrice pour une QUEA est la quantification de la notion de r–matrice classique pour un bigèbre de Lie, ce qui équivaut à considerer les bigèbres de Lie dont le cocrochet soit un coborde particulier. Plus en général, les algèbres de Hopf munies de R–matrice correspondent, via la dualité de Tannaka-Krein et théorèmes de reconstruction associés, aux catégories monoidales tressées, c'est à dire munies d'un analogue du produit tensoriel et de l'automorphisme "échange de facteurs" pour ce dernier: de là découle l'intérêt de ces algèbres en théorie des champs conformes ou en théories quantiques, aussi bien que en topologie pour la costruction d'invariants de nœuds et de 3-varietés. On obtient une notion plus faible si l'on remplace la R–matrice avec un automorphisme convenable de l'algèbre de Hopf, dit *tressage*.

Dans ma recherche sur ce sujet, j'ai appliqué le QDP (voir ci-dessus) aux QUEA munies de R–matrice (dites "quasitriangulaires"): le résultat principal est que, à partir d'une bigèbre de Lie munie de r–matrice classique (elle aussi dite "quasitriangulaire"), on trouve un correspondant géométrique de cette r–matrice pour le groupe de Poisson formel *dual*, ce qui explique le lien entre r–matrices et dualité entre groupes de Poisson.

En [1], à partir d'une QUEA sur un'algèbre de Lie semisimple et son R–matrice standard, en tirant de la QUEA une QFA (selon le QDP, comme en [E1] ou [E2] ou [22]) on montre que l'action adjointe de la R–matrice se specialise à un automorphisme sur cette QFA. En plus, la limite semiclassique de ce dernier est à son tour un automorphisme birationnel du groupe de Poisson dual, et precisement un tressage, au sense géométrique; on étend ainsi un résultat de Reshetikhin pour $SL(2)$. Tout cela est généralisé au cas des algèbres de Kac-Moody en [8]. En [10] on fait encore un'extension, en prouvant qu'un résultat du même type est valable pour toute QUEA quasitriangulaire: ici on applique le QDP comme en [12], c'est à dire pour groupes quantiques topologiques, en utilisant directement la definition générale du foncteur $QUEA \longrightarrow QFA$, plutôt qu'une description explicite comme l'on a en [1] et [8].

En [13] on fait une comparaison entre les résultats de [1] et ceux de Weinstein et Xu, qui construissent un tressage analogue sur le dual d'un groupe de Poisson quasitriangulaire, avec méthodes purement géométriques. Notre prémier résultat est que tous deux les tressages sont "infinitesimalment triviaux". Le deuxième est que pour $SL(2)$ ces deux tressages coïncident: la preuve s'ensuit d'une leur description explicite, via calcul direct.

Enfin, en [14] on montre que, si G est un groupe de Poisson formel quasitriangulaire avec r–matrice classique r, un tressage associé à r sur le groupe de Poisson formel dual G^* est *unique*: en particulier, celui en [13] et celui de Weinstein et Xu coïncident forcement. En outre, on precise la nature d'un tel tressage, en prouvant qu'il est Hamiltonnien, correspondant à une fonction ρ sur G^*, laquelle est un "relèvement" de r, de l'algèbre de Lie cotangente de G^* à l'algèbre des fonctions sur G^* lui même. On donne deux constructions de cette ρ: dans la première, ρ est obtenu comme limite semiclassique du "logarithme" d'une R–matrice quantique (decalée) qui quantifie r ; dans la seconde, on construit ρ directement comme relèvement de r par approximations successives, où la possibilité de faire le pas n–ème est prouvée moyennant méthodes coomologiques.

Pour terminer, en [47] nous traitons d'autres constructions portantes sur les R–matrices — avec leur contreparties duales, à savoir les ϱ–comatrices — qui sont standard en théorie des algèbres de Hopf. En fait, nous prouvons que dans le cas des groupes quantiques (soit QUEA que QFA, dans le contexte formel) elles donnent effectivement de résultats très précis qui impliquent une fois plus le Principe de Dualité Quantique appliqué au group quantique concerné. En plus, nous montrons aussi que ces constructions s'étendent à un contexte plus ample qui utilise les notions plus générales de "R–matrice polaire" et "ϱ–comatrice polaire".

Groupes quantiques multiparametriques et déformations: Les groupes quantiques *multiparametriques* sont groupes quantiques — à savoir, QUEA ou QFSHA/QFA — qui dépendent de plus d'un paramètre: parmi ces paramètres, neanmoins, un seul a une "valeur quantique", tandis que les autres ont "valeur géométrique". En literature, on a étudié soit ceux dont les "paramètres géométriques" affectent la structure de cogèbre, soit ceux où affectent la structure d'alèbre.

Le premier cas que j'ai étudié a été celui des groupes quantiques multiparametriques duaux de ceux semisimples dans lequels on avait modifié (avec paramètres "geometriques") la structure de cogèbre: les résultats sont relatés en [0] et en [3], qui montrent que dans ces groupes quantiques duaux les paramètres géométriques affectent par contre (duellement!) la structure d'alèbre. À côté, en [41] nous étudions QUEA multiparametriques (de type *polynomial*) pour algèbres de Kac–Moody de type symétrisable, dans lesquelles les paramètres géométriques affectect la structure d'alèbre. Cet étude est repris et approfondi en [40] et en [44], en termes de QUEA de type *formel*, et ensuite est étendu en [48] au cas de *super*groupes quantiques. Dans tous ces cas — inclus aussi [0] et [3] — on étudie également les limites semiclassiques de ces structures, qui sont (super)bigèbres de Lie "multiparametriques" qu'on décrit en detail. Enfin, en [51] on étend cet étude au cas de QFA pour groupes quantiques multiparametriques.

D'un autre côté, les groupes quantiques sont algèbres de Hopf particulières, et pour cela on peut les "déformer" pour obtenir des nouvelles algèbres de Hopf — et éventuellement, nouveaux groupes quantiques; cettes déformations-ci sont essentiellement de deux types, par torseur ou par 2–cycle, la première change la structure de cogèbre, la deuxième celle d'alèbre. En particulier, moyennant cettes constructions on peut obtenir groupes quantiques multiparametriques, tout en partant de groupes quantiques uniparametriques et déformant ceux-là convenablement (moyennant un torseur ou un 2–cocycle particuliers). Par exemple, les résultats en [41] s'appuyent en grand partie sur ce genre de construction. Plus en général, le lien entre groupes quantiques multiparametriques et déformations est étudié longuement en [40], [44], [48] et [51]: précisément,

(a) en [40] et en [44] on étudient QUEA pour groupes quantiques multiparametriques, et leurs déformations, démontrant en particulier que déformations par torseur ou par 2–cocycle sont ("moralment") de la même nature, en particulier laissent stable cette classe de QUEA multiparametriques;

(b) en [48] on étend l'étude fait en [44] au cas des QUEA (formelles) pour *super*groupes quantiques multiparametriques, avec résultate entièrement semblables;

(c) en [51] on développe l'étude analogue de [40] et [44], mais dedié au cas des QFA pour groupes quantiques multiparametriques.

Enfin, le travil [47] analyse méthodiquement le sujet de la construction de déformations (par torsuer ou par 2–cocycle) des groupes quantiques, et de leur effet sur la limite semiclassique: le résultat principal — inspiré par le QDP — est qu'on peut étendre ces procédures jusqu'à construire "déformations par *torseur polaire*" pour les QUEA (formelles) et "déformations par *2–cocycle polaire*" pour les QFSHA. Ceci étend de manière non banale les constructions usuelles de la théorie de Hopf, si bien qu'on introduit des nouveaux outils pour la théorie des déformations des groupes quantiques, aussi bien que pour leurs limites semiclassiques.

Algèbres de Hopf et structures liées: La théorie des algèbres de Hopf est un sujet classique qui a gagné un nouveau intêret dans les derniérs vingt ans, principalment grâces à ses liens avec domaines si differents que les groupes quantiques, topologie en petite dimension, catégories tensorielles, supergéométrie, etc.

Mes contributions sur tout cela se partagent en trois sillons principaux.

CDP: Le *principe de dualité cristallin*, ou CDP en bref, est un important corollaire du QDP, obtenu en applicant ceci aux algèbres de Hopf définies sur un corps, lorsque on étend les scalairs de celles-ci aux polynômes sur ce corps. Neanmoins, ce résultat peut être obtenu presque totalement moyennant tecniques et outils de la théorie "classique", c'est à dire "non quantique", des algèbres de Hopf sur un corps: de cette manière, on realise un nouveau chapitre de théorie "standard", dans lequel on associe à toute algèbre de Hopf (qui est une symmetrie généralisée) groupes de Poisson et bigèbres de Lie (qui sont symmetries géométriques). Cette approche de type "classique" est implementée en [17]. Une version abregée de ce travail est [15] (actes d'une conférence). Par contre, [16] est l'analyse explicite en détail d'un exemple important, un'algèbre de Hopf construite sur le groupe de Nottingham des series formelles de degré 1, avec le produit de composition. Ceci est seulement un parmi nombre d'exemples d'algèbres de Hopf definies sur la base de données combinatoires (graphes, arbres, diagrammes de Feynman, etc.) qui se présentent naturellement en (co)homologie, géométrie non commutative et physique quantique; du coup, cela est tres instructif comme "toy model" de situations plus générales.

Structures quasitriangulaires (et généralizations): Une classe tres speciale d'algèbres de Hopf est celle où — en gros — le manque de cocommutativité est en quelque sorte "sous control". Cette idée est codifiée dans la notion d'algèbre de Hopf quasitriangulaire et dans ses differentes généralizations. J'ai étudié ce sujet dans une série de travaux — [1], [8], [10], [13], [14] et [47] — où les algèbres de Hopf sous examen sont toutes groupes quantiques: pour plus de détails, voir la section *R-MAT* en "Groupes Quantiques" ci-dessus.

Généralizations (algèbres quasi-Hopf, superalgèbres de Hopf, etc.): Il y a plusieurs généralizations des algèbres de Hopf: parmi celles-là, je considère les cas des *algèbres quasi-Hopf* et des *superalgèbres de Hopf*. Dans le premier cas, on affaiblit l'axiome de coassociativité; dans le second, on considère algèbres de Hopf dans la catégorie des superéspaces (c'est-à-dire, éspaces $\mathbf{Z}_2$–gradués) vectoriels — ou supermodules sur un anneau — de manière que les produits tensoriels doivent être maniés differemment.

L'étude des *quasi-algèbres de Hopf* est devenu tres important grâce aux travaux de Drinfeld dans la seconde moitié des années '80 du siècle passé. L'ingredient principal en cet étude est la notion de "associateur": en gros, ceci mesure le manque de coassociativité dans l'algèbre quasi-Hopf. En plus, les associateurs ont montré toute leur importance dans d'autres contextes égalment: par exemple, pour résoudre le problème général de la quantification des bigèbres de Lie. Au fait, à ce jour le seul associateur qu'on connaisse est l'*associateur KZ*, obtenu comme solution de l'equation differentielle de Knizhnik-Zamolodchikov (par rapport à la connexion du même nom sur $\mathbf{C}^n$), pour laquelle on connaissait — en forme explicite — seulement une formule additive. En [20] par contre on donne une formule explicite pour le *logarithme* de cet associateur (comme applicatione particulière d'un résultat plus general), en termes de ζ–fonctions multiples.

Pour les superalgèbres de Hopf, les commutatives (au "sense super") ont une signification géométrique: à savoir, leur spectres sont les nommés *supergroupes* algébriques affines, tout comme classiquement les groupes algébriques affines sont les spectres des algèbres de Hopf commutatives. Mes contributions principales sur ce thème sont en [29], [30], [31], [32], [33], [36], [31-Cor], [38], [39], [E3] e [43], dont le contenu est expliqué en détail ci-dessus — voir la section *Supergroupes* en "Groupes Algbriques, Représentations et sujets liés".

Enfin, une extension importante de la notion d'algèbre de Hopf (au fait, de bigèbre plutôt) est celle de *bigébroide*: elle a montré une importance croissante en plusieurs domains, p.e. en géométrie non-commutative. Je commence à analyser cela en [34], dedié à étudier les quantifications (au sens formel) des bigébroides. En particulier, ici on étudie les foncteurs qui donnent dualité linéaire entre bigébroides (quantiques) — quelque chose plus ou moins dejà connue — et on introduit des foncteurs convenables, noveaux, "à la Drinfeld" qui établissent un QDP pour bigébroides quantiques — la contribution originelle (principale) de cet article (voir aussi la section *QDP* en "Quantum Groups" ci-dessus). Ces arguments sont traités plus en profondeur en [50], où on se concentre sur la sous-classe des "bigébroides d'action", et parmi ces-là en particulier sur les "groupoides quantiques d'action".

Dans ce domain-ci on a aussi [37], qui est dedié tout particulièrement à l'étude de la dualité pour bigébroides ayant une structure supplémentaire convenable.

— PUBLICATIONS —

Travaux en preparation

[**51**] — G. A. García, F. Gavarini, *"Multiparameter quantum function algebras and their deformations"*

[**50**] — S. Chemla, F. Gavarini, N. Kowalzig, *"Duality functors for action quantum groupoids"*

[**49**] — G. A. García, F. Gavarini, *"GaGa algebras"*

Prepublications

[**48**] — G. A. García, F. Gavarini, M. Paolini, *"Multiparameter quantum supergroups, deformations and specializations"* — preprint `http://arxiv.org/abs/2410.22549 [math.QA]` (2024), 64 pages;

[**47**] — G. A. García, F. Gavarini, *"Quantum group deformations and quantum R–(co)matrices vs. Quantum Duality Principle"*, 58 pages (2024) — **N.B.:** version étendue en `http://arxiv.org/abs/2403.15096 [math.QA]` (2024), 72 pages

[**46**] — M.-K. Chuah, F. Gavarini, *"Super Kähler structures on the complex Abelian Lie supergroups"* — preprint `http://arxiv.org/abs/2312.00444 [math.DG]` (2023), 29 pages;

[**45**] — M.-K. Chuah, R. Fioresi, F. Gavarini, *"Admissible Systems and Graded Hermitian Superspaces"*, soumis (2020), 15 pages.

Articles sur journaux, Actes, etc.

[**44**] — G. A. García, F. Gavarini *"Formal multiparameter quantum groups, deformations and specializations"*, Annales de l'Institut Fourier (à paraitre), 117 pages — preprint `http://arxiv.org/abs/2203.11023 [math.QA]` (2022);

[**43**] — R. Fioresi, F. Gavarini, *"Real forms of complex Lie superalgebras and supergroups"*, Communications in Mathematical Physics **397** (2023), no. 2, 937–965 — **DOI:** `10.1007/s00220-022-04502-x` ;

[**42**] — F. Gavarini, *"Quantum duality principle for quantum continuous Kac-Moody algebras"*, Journal of Lie Theory **32** (2022), no. 2, 839–862;

[**41**] — G. A. García, F. Gavarini, *"Multiparameter quantum groups at roots of unity"*, Journal of Noncommutative Geometry **16** (2022), no. 3, 839–926 — **DOI:** `10.4171/JNCG/471` ;

[**40**] — G. A. García, F. Gavarini, *"Twisted deformations vs. cocycle deformations for quantum groups"*, Communications in Contemporary Mathematics **23** (2021), no. 8 - 2050084 (56 pages) — **DOI:** `10.1142/S0219199720500844` ;

[**39**] — F. Gavarini, *"A new equivalence between super Harish-Chandra pairs and Lie supergroups"*, Pacific Journal of Mathematics **306** (2020), no. 2, 451–485 — **DOI:** `10.2140/pjm.2020.306.451` ;

[**38**] — K. Iohara, F. Gavarini, *"Singular degenerations of Lie supergroups of type $D(2,1;a)$"*, SIGMA **14** (2018), 137, 36 pages — voir `https://www.emis.de/journals/SIGMA/2018/137/` — **DOI:** `10.3842/SIGMA.2018.137` ;

[**37**] — S. Chemla, F. Gavarini, N. Kowalzig, *"Duality features of left-Hopf algebroids"*, Algebras and Representation Theory **19** (2016), no. 4, 913–941 — **DOI:** `10.1007//s10468-016-9604-9` ;

[**36**] — F. Gavarini, *"Global splittings and super Harish-Chandra pairs for affine supergroups"*, Transactions of the American Mathematical Society **368** (2016), 3973–4026 — **DOI:** `10.1090/tran/6456` ;

[**35**] — N. Ciccoli, F. Gavarini, *"A global quantum duality principle for subgroups and homogeneous spaces"*, Documenta Mathematica **19** (2014), 333–380;

[**34**] — S. Chemla, F. Gavarini, *"Duality functors for quantum bialgebroids"*, Journal of Noncommutative Geometry (2015), no. 2, 287–358 — **DOI:** `10.4171/JNCG/194` ;

[**33**] — F. Gavarini, *"Chevalley supergroups of type $D(2,1;a)$"*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2) **57** (2014), no. 2, 465–491 —
DOI: `10.1017/S0013091513000503` ;

[**32**] — R. Fioresi, F. Gavarini, *"Algebraic supergroups with Lie superalgebras of classical type"*, Journal of Lie Theory **23** (2013), no. 1, 143–158;

[**31-Cor**] — F. Gavarini, *"Corrigendum to Algebraic supergroups of Cartan type"*, Forum Mathematicum **28** (2016), no. 5, 1005–1009 — **DOI:** `10.1515/forum-2015-0044` — complement de [**31**] ci-dessous ;

[**31**] — F. Gavarini, *"Algebraic supergroups of Cartan type"*, Forum Mathematicum **26** (2014), no. 5, 1473–1564 — **DOI:** `10.1515/forum-2011-0144`
— • voir aussi le ∗∗∗ **Corrigendum** ∗∗∗ en [**31-Cor**] ci-dessus!!! • —

[**30**] — R. Fioresi, F. Gavarini, *"On the construction of Chevalley supergroups"*, en: S. Ferrara, R. Fioresi, V. S. Varadarajan (eds.), *Supersymmetry in Mathematics and Physics*, UCLA Los Angeles, U.S.A. 2010, Lecture Notes in Mathematics **2027**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011, pp. 101–123 — **DOI:** `10.1007/978-3-642-21744-9_5` ;

[**29**] — R. Fioresi, F. Gavarini, *"Chevalley Supergroups"*, Memoirs of the American Mathematical Society **215**, no. 1014 (2012), pp. 1–77 —
DOI: `10.1155/S1073792803208138` ;

[**28**] — R. Fioresi, F. Gavarini, *"Quantum Duality Principle for Quantum Grassmannians"*, en: M. Marcolli, D. Parashar (eds.), *Quantum Groups and Noncommutative Spaces. Perspectives on Quantum Geometry*, 80–95, Aspects Mathematics **E41**, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011 — **DOI:** `10.1007/978-3-8348-9831-9_4` ;

[**27**] — N. Ciccoli, R. Fioresi, F. Gavarini, *"Quantization of Projective Homogeneous Spaces and Duality Principle"*, Journal of Noncommutative Geometry **2** (2008), no. 4, 449–496 — **DOI:** `10.4171/JNCG/26` ;

[**26**] — F. Gavarini, *"On the radical of Brauer algebras"*, Mathematische Zeitschrift **260** (2008), 673–697 — **DOI:** `10.1007/s00209-007-0296-z` ;

[**25**] — F. Gavarini, *"PBW theorems and Frobenius structures for quantum matrices"*, Glasgow Mathematical Journal **49** (2007), no. 3, 479–488 —
DOI: `10.1017/S0017089507003813` ;

[**24**] — F. Gavarini, Z. Rakić, *"$F_q[M_n]$, $F_q[GL_n]$ and $F_q[SL_n]$ as quantized hyperalgebras"*, Journal of Algebra **315** (2007), no. 2, 761–800 —
DOI: `10.1016/j.jalgebra.2007.03.040` ;

[**23**] — F. Gavarini, Z. Rakić, *"$F_q[M_2]$, $F_q[GL_2]$ and $F_q[SL_2]$ as quantized hyperalgebras"*, Communications in Algebra **37** (2009), no. 1, 95–119 —
DOI: `10.1080/00927870802241238` ;

[**22**] — F. Gavarini, *"The global quantum duality principle"*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **612** (2007), 17-33 — **DOI:** `10.1515/CRELLE.2007.082` ;

[**21**] — N. Ciccoli, F. Gavarini, *"Quantum duality principle for coisotropic subgroups and Poisson quotients"*, en: N. Bokan, M. Djoric, A. T. Fomenko, Z. Rakić, B. Wegner, J. Wess (eds.), *Contemporary Geometry and Related Topics, Proceedings of the Workshop* (Belgrade, June 26–July 2, 2005), EMIS ed., 2006, pp. 99–118 — voir aussi `http://www.emis.de/proceedings/CGRT2005` ;

[**20**] — B. Enriquez, F. Gavarini, *"A formula for the logarithm of the KZ associator"*, SIGMA **2**, Vadim Kuznetsov Memorial Issue "Integrable Systems and Related Topics" (2006), Paper 080, 3 pages — **DOI:** `10.3842/SIGMA.2006.080` — voir aussi
`http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper080` ;

[**19**] — F. Gavarini, *"Presentation by Borel subalgebras and Chevalley generators for quantum enveloping algebras"*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **49** (2006), no. 2, 291–308 — **DOI:** `10.1017/S0013091504000689` ;

[**18**] — N. Ciccoli, F. Gavarini, *"A quantum duality principle for coisotropic subgroups and Poisson quotients"*, Advances in Mathematics **199** (2006), no. 1, 104–135 —
DOI: `10.1016/j.aim.2005.01.009` ;

[**17**] — F. Gavarini, *"The crystal duality principle: from Hopf algebras to geometrical symmetries"*, Journal of Algebra **285** (2005), no. 1, 399–437 —
DOI: `10.1016/j.jalgebra.2004.12.003` ;

[**16**] — F. Gavarini, *"Poisson geometrical symmetries associated to non-commutative formal diffeomorphisms"*, Communications in Mathematical Physics **253** (2005), no. 1, 121-155 — **DOI:** `10.1007/s00220-004-1175-7` ;

[**15**] — F. Gavarini, *"The crystal duality principle: from general symmetries to geometrical symmetries"*, en: N. Bokan, M. Djoric, Z. Rakić, A. T. Fomenko, J. Wess (eds.), *Contemporary Geometry and Related Topics, Proceedings of the Workshop* (Belgrade, 15–21 May 2002), World Scientific, 2004, pp. 223–249;

[14] — B. Enriquez, F. Gavarini, G. Halbout, *"Uniqueness of braidings of quasitriangular Lie bialgebras and lifts of classical r-matrices"*, *International Mathematics Research Notices* **46** (2003), 2461–2486 — **DOI:** `10.1155/S1073792803208138` ;

[13] — F. Gavarini, G. Halbout, *"Braiding structures on formal Poisson groups and classical solutions of the QYBE"*, *Journal of Geometry and Physics* **46** (2003), no. 3–4, 255–282 — **DOI:** `10.1016/S0393-0440(02)00147-X` ;

[12] — F. Gavarini, *"The quantum duality principle"*, Annales de l'Institut Fourier **52** (2002), no. 3, 809-834 — **DOI:** `10.5802/aif.1902` ;

[11] — F. Gavarini, *"On the global quantum duality principle"*, en: Zoran Kadelburg (ed.), *Proceedings of the 10^{th} Congress of Yugoslav Mathematicians* (January 21–24, 2001; Belgrade, Yugoslavia), Vedes, Belgrade, 2001, pp. 161–168;

[10] — F. Gavarini, G. Halbout, *"Tressages des groupes de Poisson formels à dual quasitriangulaire"*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **161** (2001), no. 2, 295–307 — **DOI:** `10.1016/S0022-4049(00)00099-2` *(disponible en-ligne en version anglaise aussi)*;

[9] — F. Gavarini, *"A global version of the quantum duality principle"*, *Czechoslovak Journal of Physics* **51** (2001), no. 12, 1330–1335 — **DOI:** `10.1023/A:1013322103870` ;

[8] — F. Gavarini, *"The R–matrix action of untwisted affine quantum groups at roots of 1"*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **155** (2001), no. 1, 41–52 — **DOI:** `10.1016/S0022-4049(99)00117-6` ;

[7] — F. Gavarini, *"Dual affine quantum groups"*, *Mathematische Zeitschrift* **234** (2000), no. 1, 9–52 — **DOI:** `10.1007/s002090050502` ;

[6] — F. Gavarini, *"A PBW basis for Lusztig's form of untwisted affine quantum groups"*, *Communications in Algebra* **27** (1999), no. 2, 903–918 — **DOI:** `10.1080/00927879908826468` ;

[5] — F. Gavarini, *"A Brauer algebra theoretic proof of Littlewood's restriction rules"*, *Journal of Algebra* **212** (1999), no. 1, 240–271 — **DOI:** `10.1006/jabr.1998.7536` ;

[4] — F. Gavarini, *"Quantum function algebras as quantum enveloping algebras"*, *Communications in Algebra* **26** (1998), no. 6, 1795–1818 — **DOI:** `10.1080/00927879808826240` ;

[3] — F. Gavarini, *"Quantization of Poisson groups"*, Pacific Journal of Mathematics **186** (1998), no. 2, 217–266 — **DOI:** `10.2140/pjm.1998.186.217` ;

[2] — F. Gavarini, P. Papi, *"Representations of the Brauer algebra and Littlewood's restriction rules"*, *Journal of Algebra* **194** (1997), no. 1, 275–298 — **DOI:** `10.1006/jabr.1996.7003` ;

[1] — F. Gavarini, *"Geometrical Meaning of R-matrix action for Quantum Groups at Roots of 1"*, *Communications in Mathematical Physics* **184** (1997), no. 1, 95–117 — **DOI:** `10.1007/s002200050054` ;

[0] — F. Gavarini, *"Quantizzazione di gruppi di Poisson"*, *Tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica*, Università degli Studi di Roma "La Sapienza" (1996).

Essais non publiés

[E3] — F. Gavarini, *"Lie supergroups vs. super Harish-Chandra pairs: a new equivalence"*, 47 pages — voir `http://arxiv.org/abs/1609.02844` (2016);

[E2] — F. Gavarini, *"The global quantum duality principle: a survey through examples"*, en *Proceedings des Rencontres Mathématiques de Glanon – 6^e^ édition* (1–5/7/2002; Glanon, France), 2004, 60 pages, voir `http://arxiv.org/abs/1109.3729` ;

[E1] — F. Gavarini, *"The global quantum duality principle: theory, examples, and applications"*, 120 pages, voir `http://arxiv.org/abs/math.QA/0303019` (2003).

Critiques

No. 77 critiques de livres et articles scientifiques — entre autres, une *Featured Review* — pour *Mathematical Reviews* (American Mathematical Society ed.), sur les thèmes suivants:

Théorie des Invariants classique et problèmes liés — Algèbre linéaire et multilinéaire: thèorie des matrices — Algèbres de Lie, bigèbres de Lie, algèbres enveloppantes universelles et leur représentations - Catégories monoidales, symétriques, tressées — Groupes de Coxeter, groupes de permutations, groupes algèbriques, groupes de Lie, groupes de Lie-Poisson et leur représentations — Systèms hamiltonniens de dimension finie et infinie, varietés de Poisson de dimension infinie — Groupes quantiques, groupes et algèbres dans les thèories quantiques, mécanique quantique et problème de la quantification — Cogèbres, bigèbres, algèbres de Hopf et généralizations.