Matematica Discreta — Tutorato 10

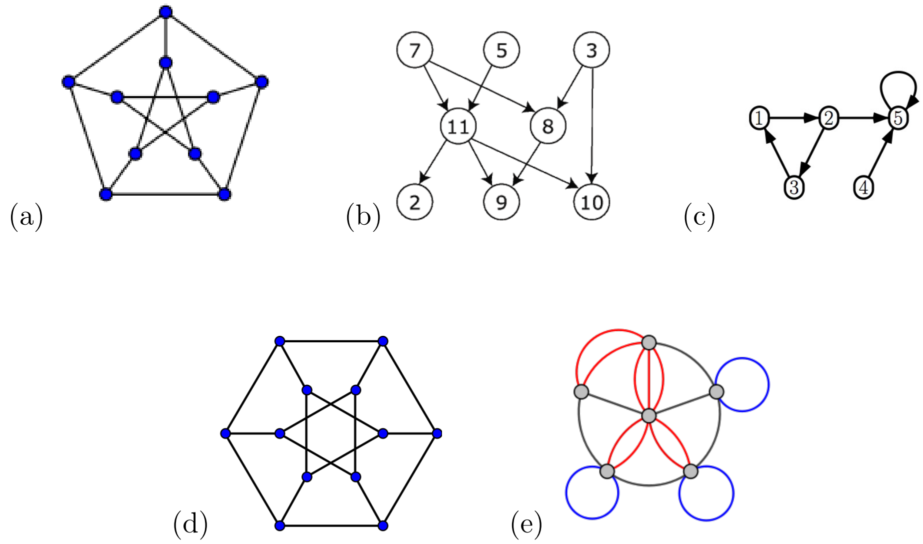

Figura 1: Esempi di (multi)grafi e (multi)digrafi.

Esercizio 1. Per ciascun grafo in figura :

(a) Scrivere la matrice di adiacenza.

(b) Determinare il grado (oppure grado entrante, uscente e totale) di ogni nodo.

(c) Determinare se il grafo è *aciclico*.

(d) Determinare se i grafi sono Euleriani (motivando la risposta). In caso positivo trovare esplicitamente un ciclo euleriano.

Esercizio 2. Sia $\overrightarrow{G}$ il grafo orientato determinato dalla seguente matrice di adiacenza :

$$A_{\overrightarrow{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

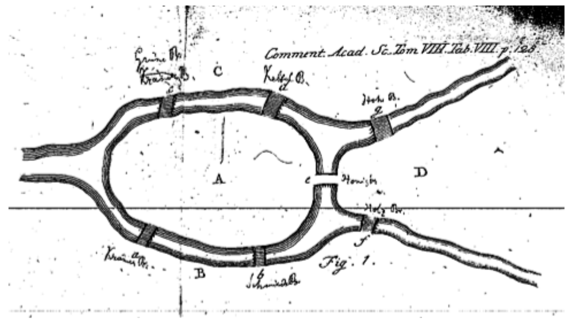

Figura 2: Mappa di Königsberg ai tempi di Euler.

(a) Disegnare il grafo.

(b) Determinare i gradi entrante, uscente e totale di ogni nodo.

(c) Determinare se il grafo sia Euleriano (motivando la risposta)e, in caso positivo, trovare esplicitamente un ciclo euleriano.

(d) Scrivere la matrice di adiacenza A_G del grafo soggiacente G e ripetere il punto (c) per questo grafo.

Esercizio 3. Risolvere lo storico problema dei ponti di Königsberg (l'attuale Kaliningrad) risolto da Euler nel 1736. E' possibile attraversare tutti i 7 ponti una e una volta soltanto e tornare al punto di partenza?
Modellizzare il problema con un grafo (osservando l'immagine in Figura 2).

Esercizio 4. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Definiamo $G' = (V', E')$ (il *complemento* di G) il grafo con gli stessi vertici di G ed archi $\{i, j\} \in E'$ se e solo se $\{i, j\} \notin E$. Dimostrare che uno tra G e G' è sempre connesso e trovare la matrice di adiacenza di G' in funzione di quella di G.

Esercizio 5. Dimostrare che un grafo è *bipartito* se e solo se non contiene un ciclo di lunghezza dispari.

Esercizio 6. Sia G un grafo connesso ed a un suo vertice. Dimostrare che G è *bipartito* se e solo se vale $d(a, b) \neq d(a, c)$ per ogni arco $\{b, c\}$, dove $d(x, y)$ è la lunghezza del cammino minimo (shortest path) tra x ed y.

Esercizio 7. Dimostrare che ogni grafo possiede due vertici con lo stesso grado.