Matematica Discreta

CdL in Informatica

Università di Roma Tor Vergata

A.A. 2017/2018

Tutorato 24 Gennaio

Esercizio 1. Si consideri il multidigrafo $\overrightarrow{G}$, avente esattamente cinque vertici v_1 , v_2 , v_3 , v_4 e v_5 , la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_{\overrightarrow{G}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Detrminare il grado entrante $d^+(v)$, il grado uscente $d^-(v)$ e il grado totale $d^{tot}(v)$ di ciascun vertice v di $\overrightarrow{G}$.

b) Determinare la matrice di adiacenza del multigrafo $\overline{G}$ associato (o "soggiacente") al multidigrafo $\overrightarrow{G}$.

c) Determinare se il multigrafo $\overline{G}$ (associato a $\overrightarrow{G}$) sia connesso. In caso negativo, indicare almeno due vertici che appartengano a componenti connesse diverse; in caso positivo, determinare almeno tre alberi ricoprenti — a due a due diversi — di $\overline{G}$.

d) Determinare se il multidigrafo $\overrightarrow{G}$ sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano in $\overrightarrow{G}$, indicandone la successione di vertici e archi.

e) Descrivere graficamente il multidigrafo $\overrightarrow{G}$.

Esercizio 2. Si consideri il multigrafo G , avente esattamente otto vertici v_1 , v_2 , $\dots$, v_8 , la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_G := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare se il multigrafo G sia un *albero*.

b) Determinare se il multigrafo G sia *euleriano*: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si trovi esplicitamente un *cammino euleriano* in G , indicandone la successione di vertici e spigoli.

c) Determinare, se esiste, un *albero ricoprente* del multigrafo G nel quale i vertici v_1 , v_4 , v_5 e v_7 siano *foglie*. In caso negativo, si spieghi perché un tale albero non esista.

d) Determinare, se esiste, un *albero ricoprente* del multigrafo G nel quale i vertici v_2, v_5, v_6 e v_8 siano *foglie*. In caso negativo, si spieghi perché un tale albero non esista.

e) Determinare, se esistono, tutti i *cicli* presenti nel multigrafo G, descrivendoli come successioni di vertici e spigoli.

Esercizio 3. Dimostrare che un grafo è *bipartito* se e solo se non contiene un ciclo di lunghezza dispari.

Esercizio 4. Dimostrare il seguente risultato (analogo a quello dimostrato sugli alberi):
Sia G un grafo ad n vertici. Allora sono equivalenti:

a) G è una foresta;

b) G ha k archi ed $n - k$ componenti connesse;

c) L'eliminazione di un qualsiasi arco aumenta di 1 il numero di componenti connesse;

d) Due vertici in una stessa componente connessa di G sono connessi da un *unico* cammino;

e) L'aggiunta di un qualsiasi nuovo arco crea *esattamente* un ciclo o diminuisce di 1 il numero di componenti connesse.

Esercizio 5. Determinare tutti gli alberi ricoprenti di K_4, il grafo completo con 4 vertici.

Esercizio 6. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti per un albero T di $n \geq 2$ nodi:

a) T ammette un cammino euleriano;

b) T ha esattamente 2 vertici di grado 1;

c) T ha esattamente $n - 2$ vertici di grado 2.