# Matematica Discreta

**CdL in Informatica**

*Università di Roma Tor Vergata*

*A.A. 2017/2018*

Tutorato 3 Novembre

**Esercizio 1.** Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Sia $\lambda$ la relazione in $\mathbb{Q}$ definita da

$$n \lambda m \iff n^2 - 3m + 7 = m^2 - 3n + 7 \qquad \forall n, m \in \mathbb{Q}$$

Determinare se $\lambda$ è una relazione di equivalenza. In caso negativo, si spieghi quali proprietà di una relazione di equivalenza non sono valide per $\lambda$; in caso affermativo, si descrivano le classi di equivalenza di $\lambda$ e l'insieme quoziente $\mathbb{Q}/\lambda$.

**Esercizio 2.** Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Nell'insieme $E := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(1,0)\}$ si definisca una relazione $\mu$ ponendo per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$

$$(x_1, y_1)\ \mu\ (x_2, y_2) \iff y_1 x_2 - y_1 + y_2 - x_1 y_2 = 0$$

Determinare se $\mu$ è una relazione di equivalenza. In caso negativo, si spieghi quali proprietà di una relazione di equivalenza non sono valide per $\mu$; in caso affermativo, si descrivano le classi di equivalenza e l'insieme quoziente $E/\mu$.

**Esercizio 3.** Dimostrare le seguenti identità per induzione:

a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$;

b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$;

c) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

**Esercizio 4.** Dimostrare che per ogni $\alpha \neq 1$ vale la seguente formula:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

**Esercizio 5.** Dimostrare per induzione le seguenti disuguaglianze:

a) $(n-3)^2 < n^2 + 11 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$;

b) $h^2 < h \cdot k < k^2 \qquad \forall h, k \in \mathbb{N}_+$ con $h < k$.
*Suggerimento*: induzione su $n = k - h$.

**Esercizio 6.** Dimostrare che la somma degli angoli interni di un poligono convesso di $n$ lati è $\pi\,(n-2)$.

**Esercizio 7.** Sia $A$ un insieme e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di $A$. Dimostrare per induzione che se $A$ possiede $n$ elementi allora $\mathcal{P}(A)$ possiede $2^n$ elementi.