ESERCIZI SUL

PRINCIPIO DI INDUZIONE

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Dimostrare per induzione le seguenti identità:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\sum_{h=0}^{n} h^2 \;=\; \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\sum_{t=0}^{n} t^3 \;=\; \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2 — Dimostrare per induzione le seguenti identità, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} (2\,k-1) \;=\; n^2$;

(b) $\sum_{h=0}^{n} (4\,h+1) \;=\; (2\,n+1)\,(n+1)$;

(c) $\sum_{s=0}^{n} s\,(s+1) \;=\; \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$.

3 — Dimostrare per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente diseguaglianza:

$$(n-3)^2 \;\lneqq\; n^2+11$$

4 — Dimostrare, per induzione su n , che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $A_n := 3^{2\,n+1}+2^{n+2}$ è multiplo (intero) di 7 .

5 ☡ — Dimostrare, facendo induzione su $n := k-h$, che per ogni $h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $h < k$ vale la seguente catena di diseguaglianze (strette):

$$h^2 \;<\; h\,k \;<\; k^2$$

6 — Siano A un insieme e $\underline{2}^A$ il corrispondente insieme delle funzioni caratteristiche in A . Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\underline{2}^A$ possiede 2^n elementi.

7 — Sia A un insieme, e sia $\mathcal{P}(A)$ il corrispondente insieme delle parti di A. Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\mathcal{P}(A)$ possiede 2^n elementi.

8 — Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$11 \cdot 5^{2n+1} \equiv 3 \cdot 11^{n+2} \pmod{14}$$

9 — Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, vale la disuguaglianza

$$3^n - 5\,n \;>\; 2^n + 4\,n$$

10 — *Utilizzando il Principio di Induzione*, si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $A_n := n^2 + 3\,n + 2$ è sempre pari.

11 — Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$-13 \cdot 2^{2\,n+1} \cdot 4 \equiv (-11)^{n+2} \pmod{15}$$

12 — Dimostrare per induzione i due fatti seguenti:

(a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \tfrac{1}{k}\right) = \tfrac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$;

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) = n + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$.

13 — Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$4^{2\,n+1} + 3^{n+2} \equiv 0 \pmod{13}$$

14 — Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero

$$C_n \;:=\; 5 \cdot 2^{1+3\,n} \;-\; 6^n \cdot 4 \cdot (-1)^{n^2+1}$$

è divisibile per 7.

15 — Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$2^{\,4n+1} + 7^{\,n+1} \equiv 0 \pmod{9}$$