ESERCIZI sulle FUNZIONI

— Fabio GAVARINI —

— $*$ —

1 — Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione tra insiemi. Dimostrare che:

(a) $\forall\ A' \subseteq A\,, \quad f^{-1}\Big(f\big(A'\big)\Big) \supseteq A'$;

(b) $\forall\ B' \subseteq B\,, \quad f\Big(f^{-1}\big(B'\big)\Big) \subseteq B'$.

(c) Dimostrare, tramite un esempio esplicito, che le proprietà in *(a)* e in *(b)* *non valgono*, in generale, se invece di funzioni si considerano arbitrarie corrispondenze.

2 — Sia $\phi : A \dashrightarrow B$ una corrispondenza dall'insieme A all'insieme B. Dimostrare che

$$\phi \text{ è una } \textit{funzione} \iff \big(\phi^{-1} \circ \phi \supseteq \mathrm{id}_A\big) \ \& \ \big(\phi \circ \phi^{-1} \subseteq \mathrm{id}_B\big)$$

3 — Sia $\ell : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $n \mapsto n^2$. Verificare che:

(a) la funzione ℓ *non* è suriettiva;

(b) la funzione ℓ *non* è iniettiva;

(c) la corrispondenza inversa $\ell^{-1} : \mathbb{Z} \dashrightarrow \mathbb{Z}$ *non* è una funzione.

4 — Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la funzione definita da $n \mapsto n^2$.

(a) Dimostrare che $\nexists\, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

(b) Calcolare due diverse funzioni $h, \ell \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tali che $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} = \ell \circ f$.

5 — Siano $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ le applicazioni dall'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali definite rispettivamente da $f(n) := n^2 - 5\,n + 1$ e $g(n) := n^2 - n + 2$.

(a) f è iniettiva? g è iniettiva?

(b) f è suriettiva? g è suriettiva?

6 — Per ogni $a \in \mathbb{Z}$, si consideri la funzione $f_a : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita da $f_a(q) := a\,(a-2)\,q + 7$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$; sia poi $f_a^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la restrizione di f_a al sottoinsieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi — così $f_a^{\mathbb{Z}}(z) := a\,(a-2)\,z + 7\,, \ \forall\, z \in \mathbb{Z}$.

(a) Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali la funzione f_a sia *iniettiva*.

(b) Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{Z}$ per i quali la funzione f_a sia *suriettiva*.

7 — Per ogni $c \in \mathbb{Z}$, sia $f_c : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f_c(x) := x - c\,x + c$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$. Determinare, motivando la risposta, per quali valori di c la f_c sia iniettiva, suriettiva, e/o biunivoca.

8 — Sia dato un insieme A e due suoi sottoinsiemi $B\,, C\,\big(\subseteq A\big)$. Si consideri la funzione

$$f : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}\big(B \setminus C\big)\,, \quad D \mapsto f(D) := D \setminus C \qquad \forall\; D \in \mathcal{P}(B)$$

Dimostrare che:

(a) la funzione f è suriettiva;

(b) la funzione f è iniettiva $\iff$ $B \cap C = \emptyset$.

9 — Si consideri l'insieme X e i suoi due sottoinsiemi X_+ ed X_- dati da $X := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$, $X_+ := \{\heartsuit, \spadesuit\}$, $X_- := \{\clubsuit, \diamondsuit\}$. Si considerino poi la funzione

$$f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X_+) \;\;,\quad X' \mapsto f\big(X'\big) := X' \cap X_+ \qquad \forall\; X' \in \mathcal{P}(X)$$

(a) Dimostrare che la funzione f è *non* iniettiva.

(b) Dimostrare che la funzione f è suriettiva.

10 — Siano A, B e C tre insiemi, e siano $h \in B^A$ e $k \in C^B$. Dimostrare che:

(a) h e k sono suriettive $\Longrightarrow$ $k \circ h$ è suriettiva;

(b) h e k sono iniettive $\Longrightarrow$ $k \circ h$ è iniettiva;

(c) h e k sono biiettive $\Longrightarrow$ $k \circ h$ è biiettiva.

(d) Dimostrare che *l'inverso di (a) è vero soltanto in parte*, precisamente

$$k \circ h \text{ è suriettiva} \Longrightarrow k \text{ è suriettiva}$$

mentre h , in generale, può essere anche *non* iniettiva (dimostrare quest'ultimo fatto tramite un esempio specifico, cioè per qualche scelta particolare di A, B, C, h e k);

(e) Dimostrare che *l'inverso di (b) è vero soltanto in parte*, precisamente

$$k \circ h \text{ è iniettiva} \Longrightarrow h \text{ è iniettiva}$$

mentre k , in generale, può essere anche *non* iniettiva (dimostrare quest'ultimo fatto tramite un esempio specifico, cioè per qualche scelta particolare di A, B, C, h e k).

11 — Siano A e B due insiemi. Dimostrare le seguenti implicazioni:

(a) se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ sono funzioni tali che $g \circ f = \mathrm{id}_A$, allora g è suriettiva e f è iniettiva;

(b) se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ sono funzioni inverse l'una dell'altra, allora entrambe f e g sono biiettive;

(c) se $h : A \dashrightarrow B$ e $k : B \dashrightarrow A$ sono corrispondenze tali che $k \circ h = \mathrm{id}_A$ e $h \circ k = \mathrm{id}_B$, allora entrambe h e k sono *funzioni* (precisamente funzioni invertibili, inverse l'una dell'altra).

12 — Costruire due funzioni $h, k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tali che:

(a) h sia iniettiva ma non suriettiva;

(b) k sia suriettiva ma non iniettiva.

13 — Siano A e B due insiemi qualunque, e sia $f \in B^A$ una qualsiasi funzione da A a B. Dimostrare che f è invertibile se e soltanto se f è biunivoca.

14 — Siano X, Y e Z tre insiemi, e siano $f \in Y^X$ e $g \in Z^Y$. Dimostrare che:

(a) se f e g sono invertibili, allora anche $g \circ f$ è invertibile; esprimere poi la funzione inversa $(g \circ f)^{-1}$ in funzione di f^{-1} e g^{-1}.

(b) se $g \circ f$ e g sono invertibili, allora anche f è invertibile; esprimere poi la funzione inversa f in funzione di $(g \circ f)^{-1}$ e g^{-1};

(c) se $g \circ f$ e f sono invertibili, allora anche g è invertibile; esprimere poi la funzione inversa g in funzione di $(g \circ f)^{-1}$ e f^{-1}.

15 — Si consideri l'insieme $\mathbb{A} := \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e i suoi sottoinsiemi

$$G := \{a, c, e\} \quad , \qquad H := \{b, f\} \quad , \qquad K := \{a, b, d, f, g\}$$

(a) Determinare l'unico sottoinsieme I di $\mathbb{A}$ per il quale la corrispondente funzione caratteristica $\chi_I : \mathbb{A} \longrightarrow \underline{2} := \{0,1\}$ sia data da

$$\chi_I(a) = 0 \,, \quad \chi_I(b) = 1 \,, \quad \chi_I(c) = 0 \,, \quad \chi_I(d) = 0 \,, \quad \chi_I(e) = 1 \,, \quad \chi_I(f) = 0 \,, \quad \chi_I(g) = 1$$

(b) Descrivere esplicitamente la funzione caratteristica $\chi_J : \mathbb{A} \longrightarrow \underline{2} := \{0,1\}$ del sottoinsieme $J := \{b, c, e, f\}$ di $\mathbb{A}$.

16 — Calcolare esplicitamente la corrispondenza biunivoca

$$\mathcal{P}(X) \lhook\joinrel\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \underline{2}^X \,, \qquad Y \mapsto \chi_Y \qquad\qquad \forall \;\; Y \in \mathcal{P}(X)$$

(dove χ_Y è la funzione caratteristica del sottoinsieme Y, definita da $\chi_Y(x) := 1 \;\; \forall\, x \in Y$, $\chi_Y(x) := 0 \;\; \forall\, x \in X \setminus Y$) per l'insieme $X := \{\star, \bullet, \square\}$.

17 — Dato l'insieme $E := \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$, si descrivano esplicitamente le funzioni biunivoche $\mathcal{P}(E) \lhook\joinrel\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \underline{2}^E$ e $\underline{2}^E \lhook\joinrel\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(E)$, inverse l'una dell'altra, canonicamente associate all'insieme delle parti $\mathcal{P}(E)$ e all'insieme delle funzioni caratteristiche $\underline{2}^E$ relativi all'insieme dato E.