ESERCIZI sulle CORRISPONDENZE

— Fabio GAVARINI —

— $*$ —

1 — Considerati i due insiemi $F := \{\text{femmine}\}$, $M := \{\text{maschi}\}$, sia $\sigma : M \dashrightarrow F$ — cioè $\sigma \subseteq M \times F$ — la corrispondenza "sorella" definita da

$$m \, \sigma \, f \iff f \text{ è sorella di } m$$

e sia $\varphi : F \dashrightarrow M$ — cioè $\varphi \subseteq F \times M$ — la corrispondenza "fratello" definita da

$$f \, \varphi \, m \iff m \text{ è fratello di } f$$

Si considerino poi anche le due corrispondenze "sorella" $\sigma_P : P \dashrightarrow P$ e "fratello" $\varphi_P : P \dashrightarrow P$ definite in modo analogo dall'insieme $P := \{\text{persone}\}$ a sé stesso.

(a) Verificare che $\sigma^{-1} = \varphi$ e $\varphi^{-1} = \sigma$, cioè le corrispondenze σ e φ sono l'una l'inversa dell'altra.

(b) Verificare che $\sigma_P^{-1} \neq \varphi_P$ e $\varphi_P^{-1} \neq \sigma_P$.

(c) Verificare che $\sigma \cap \varphi = \emptyset$ e $\sigma_P \cap \varphi_P = \emptyset$.

(d) Verificare che $\sigma_P \circ \sigma_P \subseteq \sigma_P \cup \mathrm{id}_P$ e $\varphi_P \circ \varphi_P \subseteq \varphi_P \cup \mathrm{id}_P$.

(e) Verificare che $\sigma_P \circ \varphi_P \subseteq \sigma_P \cup \mathrm{id}_P$ e $\varphi_P \circ \sigma_P \subseteq \varphi_P \cup \mathrm{id}_P$.

2 — Con la notazione dell'Esercizio 1 qui sopra, sia P l'insieme delle persone, e siano σ_P e φ_P le corrispondenze "sorella" e "fratello", rispettivamente, dall'insieme P in sé stesso. Sia poi $\gamma_P : P \dashrightarrow P$ — cioè $\gamma \subseteq P \times P$ — la corrispondenza "germana/o" definita da $\gamma_P := \sigma_P \cup \varphi_P$, data cioè da $p' \, \gamma_P \, p'' \iff p''$ è sorella o fratello di p' $\big(\forall\, p', p'' \in P\big)$.

(a) Verificare che $\gamma_P^{-1} = \gamma_P$, cioè la corrispondenza γ_P è l'inversa di sé stessa.

(b) Verificare che $\gamma_P \circ \gamma_P \subseteq \gamma_P \cup \mathrm{id}_P$.

3 — Sia S l'insieme degli stati della Terra, e sia κ la corrispondenza da S in S di "confinanza", definita da $s_1 \kappa \, s_2 \overset{\Delta}{\iff} s_1$ *confina con* s_2 $\big(\forall\ s_1, s_2 \in S\big)$, dove "confina con" significa "ha una parte non vuota dei suoi confini (per terra o mare) in comune con".

Verificare che la relazione di confinanza κ gode delle seguenti proprietà:

(a) $\kappa \supseteq \mathrm{id}_S$, cioè $s \, \kappa \, s \quad \forall\ s \in S$ (proprietà *riflessiva*);

(b) $\kappa^{-1} \subseteq \kappa$, cioè $\big(s' \kappa \, s''\big) \implies \big(s'' \kappa \, s'\big) \quad \forall\ s', s'' \in S$ (proprietà *simmetrica*).

4 — Dati gli insiemi $F := \{\text{femmine}\}$ e $M := \{\text{maschi}\}$, sia $\varsigma : M \dashrightarrow F$ — cioè $\varsigma \subseteq M \times F$ — la corrispondenza "sorellastra" definita da

$$m \,\varsigma\, f \iff f \text{ è sorellastra di } m$$

e sia $\phi : F \dashrightarrow M$ — cioè $\phi \subseteq F \times M$ — la corrispondenza "fratellastro" definita da

$$f \,\phi_{P} m \iff m \text{ è fratellastro di } f$$

Siano poi $\varsigma_{P} : P \dashrightarrow P$ e $\phi_{P} : P \dashrightarrow P$ le analoghe corrispondenze definite (allo stesso modo) da $P := \{\text{persone}\}$ in sé stesso.

(a) Verificare che $\varsigma^{-1} = \phi$ e $\phi^{-1} = \varsigma$, cioè le corrispondenze ς e ϕ sono l'una l'inversa dell'altra.

(b) Verificare che $\varsigma_{P}^{-1} \neq \phi_{P}$ e $\phi_{P}^{-1} \neq \varsigma_{P}$.

(c) Verificare che $\varsigma \cap \phi = \emptyset$ e $\varsigma_{P} \cap \phi_{P} = \emptyset$.

(d) Verificare che $\varsigma_{P} \circ \varsigma_{P} \nsubseteq \varsigma_{P} \cup \mathrm{id}_{P}$ e $\phi_{P} \circ \phi_{P} \nsubseteq \phi_{P} \cup \mathrm{id}_{P}$.

(e) Verificare che $\varsigma_{P} \circ \phi_{P} \nsubseteq \varsigma_{P} \cup \mathrm{id}_{P}$ e $\phi_{P} \circ \varsigma_{P} \nsubseteq \phi_{P} \cup \mathrm{id}_{P}$.

5 — Considerati i due insiemi $D := \{\text{donne}\}$, $U := \{\text{uomini}\}$, sia $\mu : U \dashrightarrow D$ — cioè $\mu \subseteq U \times D$ — la corrispondenza "madre" definita da

$$u \,\mu\, d \iff d \text{ è madre di } u$$

e sia $\pi : D \dashrightarrow U$ — cioè $\pi \subseteq D \times U$ — la corrispondenza "padre" definita da

$$d \,\pi\, u \iff u \text{ è padre di } d$$

Si considerino poi anche le due corrispondenze "madre" $\mu_{P} : P \dashrightarrow P$ e "padre" $\pi_{P} : P \dashrightarrow P$ definite in modo analogo dall'insieme $P := \{\text{persone}\}$ a sé stesso.

(a) Verificare che $\mu^{-1} \neq \pi$ e $\pi^{-1} \neq \mu$.

(b) Verificare che $\mu_{P}^{-1} \neq \pi_{P}$ e $\pi_{P}^{-1} \neq \mu_{P}$.

(c) Verificare che $\mu \cap \pi = \emptyset$ e $\mu_{P} \cap \pi_{P} = \emptyset$.

(d) Verificare che $\mu \circ \pi \neq \pi \circ \mu$ e $\mu_{P} \circ \pi_{P} \neq \pi_{P} \circ \mu_{P}$.

6 — Sia $\kappa : A \dashrightarrow B$ — cioè $\kappa \subseteq A \times B$ — una qualsiasi corrispondenza da un insieme A a un insieme B, e sia $\kappa^{-1} : B \dashrightarrow A$ — cioè $\kappa^{-1} \subseteq B \times A$ — la corrispondenza inversa (da B ad A).

(a) Verificare che $\overleftrightarrow{\kappa} := \kappa \cup \kappa^{-1}$ è una ben definita corrispondenza dall'insieme $A \cup B$ a sé stesso (dunque è una *relazione* in $A \cup B$).

(b) Dimostrare che $\overleftrightarrow{\kappa}^{-1} = \overleftrightarrow{\kappa}$, cioè la corrispondenza $\overleftrightarrow{\kappa}$ è l'inversa di sé stessa.

7 — Ricordiamo che le notazioni $(\ )^{-1}$ e $(\ )'$ indicano rispettivamente la (corrispondenza) *inversa* e la (corrispondenza) *complementare* di una corrispondenza data.

Per ogni corrispondenza $\varphi : A \dashrightarrow B$ dall'insieme A all'insieme B, verificare che si ha $\big(\varphi^{-1}\big)^{-1} = \varphi$ e $\big(\varphi'\big)' = \varphi$ (*proprietà involutiva* degli operatori $(\ )^{-1}$ e $(\ )'$).

8 — Si considerino i tre insiemi $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} = \{\text{numeri naturali}\}$, $\mathbb{S} := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$, $\mathbb{T} := \{\flat, \sharp, \natural\}$, e tra essi le corrispondenze

$$\alpha : \mathbb{S} \dashrightarrow \mathbb{N} \quad , \quad \beta : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{T} \quad , \quad \gamma : \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{S} \quad , \quad \delta : \mathbb{T} \dashrightarrow \mathbb{N}$$

definite rispettivamente da

$$\alpha := \big\{ (\spadesuit, 23), (\diamondsuit, 5), (\heartsuit, 9), (\spadesuit, 16), (\heartsuit, 309), (\diamondsuit, 47), (\heartsuit, 16), (\diamondsuit, 11), (\heartsuit, 5) \big\}$$
$$\beta := \big\{ (47, \flat), (19, \sharp), (5, \natural), (11, \flat), (9, \natural), (23, \sharp), (9, \flat), (16, \natural), (68, \natural), (31, \flat), (23, \natural) \big\}$$
$$\gamma := \big\{ (\sharp, \spadesuit), (\natural, \diamondsuit), (\natural, \spadesuit), (\sharp, \clubsuit), (\natural, \spadesuit), (\flat, \spadesuit), (\flat, \clubsuit), (\sharp, \heartsuit) \big\}$$
$$\delta := \big\{ (\flat, 13), (\sharp, 9), (\sharp, 23), (\natural, 11), (\natural, 4), (\sharp, 51), (\natural, 309) \big\}$$

(a) Descrivere esplicitamente le corrispondenze inverse α^{-1}, β^{-1}, γ^{-1}, δ^{-1}.

(b) Determinare quali tra le corrispondenze α, β, γ, δ, α^{-1}, β^{-1}, γ^{-1}, δ^{-1} siano funzioni (o "applicazioni").

(c) Descrivere esplicitamente — *qualora siano definite!...* — le corrispondenze composte $\beta \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta$, $\gamma^{-1} \circ \alpha^{-1}$, $\gamma \circ \delta^{-1}$, $\gamma \circ \delta$, $\beta \circ \delta$, $\delta \circ \beta$, e determinare quali tra esse siano funzioni (o "applicazioni").

(d) Calcolare esplicitamente le corrispondenze composte $\gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ e $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha$, verificando poi che $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$, e determinare quali tra esse siano funzioni (o "applicazioni").

9 — Siano X e Z due insiemi, con $X \subseteq Z$, sia $\in_X^X : X \dashrightarrow \mathcal{P}(X)$ la corrispondenza di appartenenza (cioè "è elemento di") tra elementi di X e sottoinsiemi di X, sia $\in_X^Z : Z \dashrightarrow \mathcal{P}(Z)$ l'analoga corrispondenza di appartenenza tra elementi di Z e sottoinsiemi di Z, e sia $\subseteq_X^Z : \mathcal{P}(X) \dashrightarrow \mathcal{P}(Z)$ la corrispondenza "inclusione" tra sottoinsiemi di X e sottoinsiemi di Z.

Verificare che $\subseteq_X^Z \circ \in_X^X = \in_X^Z$.

10 — Siano A, B e C tre insiemi, e siano $\varphi : A \dashrightarrow B$, $\psi : A \dashrightarrow B$, e $\chi : B \dashrightarrow C$ e $\eta : B \dashrightarrow C$ quattro corrispondenze. Dimostrare che:

(a) $(\varphi \cup \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \cup \psi^{-1}$, $(\varphi \cap \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \cap \psi^{-1}$;

(b) $(\chi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}$, $\chi \subseteq \eta \implies \chi^{-1} \subseteq \eta^{-1}$.

11 — Siano $\mathbb{A} := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$ e $\mathbb{B} := \{S, P, Q, R\}$, e siano $\varphi : \mathbb{A} \dashrightarrow \mathbb{B}$ e $\psi : \mathbb{B} \dashrightarrow \mathbb{A}$ le corrispondenze date da

$$\varphi := \big\{(\heartsuit, P), (\heartsuit, R), (\clubsuit, P), (\diamondsuit, S), (\diamondsuit, Q)\big\} \; , \quad \psi := \big\{(S, \spadesuit), (P, \spadesuit), (R, \heartsuit), (R, \diamondsuit)\big\}$$

Calcolare esplicitamente le corrispondenze composte $\psi \circ \varphi$ e $\varphi \circ \psi$.

12 — Siano A e B due insiemi, con $B \neq \emptyset$. Fissato $\underline{b} \in B$, sia $\varphi_{\underline{b}} : A \dashrightarrow B$ la corrispondenza definita da $\varphi_{\underline{b}} := \big\{ (a, b) \in A \times B \;\big|\; b = \underline{b} \big\}$ — cioè la *funzione costante* da A a B di valore (costante) $\underline{b}$. Dimostrare che:

(a) $\varphi_{\underline{b}}^{-1} \circ \varphi_{\underline{b}} = A \times A$, cioè $\varphi_{\underline{b}}^{-1} \circ \varphi_{\underline{b}}$ è la *relazione totale* in A ;

(b) $\varphi_{\underline{b}} \circ \varphi_{\underline{b}}^{-1} = \big\{(\underline{b}, \underline{b})\big\}$, cioè $\varphi_{\underline{b}} \circ \varphi_{\underline{b}}^{-1}$ è la relazione in B in cui il solo elemento $\underline{b}$ è in relazione con sé stesso.

13 — Siano A, B e C tre insiemi, e siano $\chi : A \dashrightarrow B$, $\eta : A \dashrightarrow B$, $\varphi : B \dashrightarrow C$ e $\psi : B \dashrightarrow C$ quattro corrispondenze. Dimostrare che:

(a) $\varphi \circ (\chi \cup \eta) = (\varphi \circ \chi) \cup (\varphi \circ \eta)$, $(\varphi \cup \psi) \circ \chi = (\varphi \circ \chi) \cup (\psi \circ \chi)$, cioè l'operazione $\circ$ gode della proprietà *distributiva* a sinistra e a destra rispetto all'operazione $\cup$;

(b) $\varphi \circ (\chi \cap \eta) \subseteq (\varphi \circ \chi) \cap (\varphi \circ \eta)$, $(\varphi \cap \psi) \circ \chi \subseteq (\varphi \circ \chi) \cap (\psi \circ \chi)$;

(c) Trovare un esempio esplicito di insiemi A, B e C e di corrispondenze φ, ψ, χ e η per le quali si abbia

$$\varphi \circ (\chi \cap \eta) \subsetneqq (\varphi \circ \chi) \cap (\varphi \circ \eta) \quad , \quad (\varphi \cap \psi) \circ \chi \subsetneqq (\varphi \circ \chi) \cap (\psi \circ \chi)$$

(così che, in generale, l'operazione $\circ$ *non* gode della proprietà *distributiva* — né a sinistra, né a destra — rispetto all'operazione $\cap$).

14 — Sia E un insieme, e $\mathcal{P}(E)$ il suo insieme delle parti. Dimostrare che la corrispondenza $\kappa : \mathcal{P}(E) \dashrightarrow \mathcal{P}(E)$ di $\mathcal{P}(E)$ in sé (o "relazione in E") definita da

$$\kappa \;:=\; \big\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \;\big|\; Y = \mathcal{C}_E(X)\big\}$$

è un'applicazione (o "funzione") invertibile di $\mathcal{P}(E)$ in sé, e che inoltre $\kappa \circ \kappa = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.