ESERCIZI DI

COMBINATORIA

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

MEMO: *ricordiamo che*

$$\binom{n}{k} := \textit{numero di sottoinsiemi di } k \textit{ elementi in un insieme di } n \textit{ elementi}$$

Dunque posto $\underline{n} := \{1, 2, \dots, n\}$ e detto $\mathcal{P}_k(\underline{n})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\underline{n}$ aventi ciascuno k elementi, si ha che $\binom{n}{k}$ è il numero di elementi di $\mathcal{P}_k(\underline{n})$.

Si dimostra poi che $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

— ∗ —

1 — Dimostrare che $\displaystyle \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \, , \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} \, , \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2 — Dimostrare che $\displaystyle \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

3 — Dimostrare che $\displaystyle \binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{k+j}\binom{k+j}{k}$

<u>Suggerimento</u>: L'identità segue da due diversi modi di contare il numero di elementi dell'insieme delle partizioni di $\underline{n}$ *in tre blocchi che abbiano rispettivamente* k *elementi,* j *elementi e* $(n-k-j)$ *elementi — cioè il numero che nell'esercizio* **13** *più avanti è indicato con* $\displaystyle \binom{n}{k\,,\,j\,,\,(n-k-j)}$.

4 — Dimostrare che $\displaystyle \binom{n+k}{2} = \binom{n}{2} + n\,k + \binom{k}{2}$

<u>Suggerimento</u>: A sinistra c'è il numero di sottoinsiemi di due elementi in $\underline{n+k}$ *; per ogni tale sottoinsieme si verifica una e una sola delle seguenti tre possibilità:*

— i due elementi stanno entrambi nel sottoinsieme $\{1, 2, \dots, n\} = \underline{n}$ *;*

— i due elementi stanno entrambi uno nel sottoinsieme $\{1, 2, \dots, n\} = \underline{n}$ *e uno nel sottoinsieme* $\{n+1, n+2, \dots, n+k\}$ *, che è (ovviamente) in biiezione con* $\underline{k}$ *;*

— i due elementi stanno entrambi nel sottoinsieme $\{n+1, n+2, \dots, n+k\}$ *.*

5 — Dimostrare che $\displaystyle \binom{n+k}{\ell} = \sum_{s=0}^{n \vee k} \binom{n}{\ell - s} \binom{k}{s}$ dove $n \vee k := \max(n,k)$.

Suggerimento: È una diretta generalizzazione del risultato dell'esercizio precedente.

6 — Dimostrare che $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Suggerimento: Segue dall'identità insiemistica $\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(\underline{n}) = \mathcal{P}(\underline{n})$

7 — Dimostrare che $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ per ogni $n > 0$.

Suggerimento: Si riscriva l'identità nella forma $\displaystyle \circledast : \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \binom{n}{k}$ *— che è equivalente a quella iniziale — e si distinguano i due casi n dispari e n pari. Nel primo caso, l'identità $\circledast$ si ottiene tramite l'esercizio* **1** *qui sopra; nel secondo, tramite l'***1** *e il* **2**.

8 — *Formula del binomio (Newton):* Dimostrare che $\displaystyle (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}$

Suggerimento: Si utilizzi semplicemente il significato combinatorio dei numeri $\binom{n}{k}$, *OPPURE (più difficile!) si faccia induzione su n, utilizzando le identità nell'esercizio* **2** .

9 — Si deducano i risultati degli esercizi **6** e **7** qui sopra come applicazione particolare dell'identità nell'esercizio **8**.

10 — Dimostrare che $\displaystyle k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Suggerimento: L'identità segue da due diversi modi di contare il numero di elementi dell'insieme $\big\{ (x,X) \in \underline{n} \times \mathcal{P}_k(\underline{n}) \,\big|\, x \in X \big\}$.

11 — Dimostrare che $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \, 2^{n-1}$

Suggerimento: L'identità segue da due diversi modi di contare il numero di elementi dell'insieme $\big\{ (x,X) \in \underline{n} \times \mathcal{P}(\underline{n}) \,\big|\, x \in X \big\}$ *. In alternativa, segue anche dagli esercizi* **6** *— con $n-1$ al posto di n — e* **9** *qui sopra.*

12 — Dimostrare che $$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \left(n^2+n\right) 2^{n-2}$$

<u>Suggerimento:</u> *L'identità segue da due diversi modi di contare il numero di elementi dell'insieme* $\left\{ \left(x_1, x_2, X\right) \in \underline{n} \times \underline{n} \times \mathcal{P}(\underline{n}) \,\middle|\, x_1, x_2 \in X \right\}$ *. In alternativa, segue anche dagli esercizi* **6** *— usato due volte, con n sostituito una volta da $n-1$ e un'altra da $n-2$ — e* **9** *(applicato due volte) qui sopra.*

13 — <u>*Definizione e formula esplicita dei Coefficienti Multinomiali:*</u> Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni scelta di $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ tali che $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$, si definisce

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} := \begin{array}{l} \textit{numero di partizioni di un insieme di } n \textit{ elementi} \\ \textit{in } s \textit{ sottoinsiemi a due a due distinti} \end{array}$$

In modo equivalente, posto

$$\mathcal{P}_{k_1,k_2,\dots,k_s}(\underline{n}) := \left\{ \{X_1, X_2, \dots X_s\} \subseteq \mathcal{P}(\underline{n}) \,\middle|\, |X_i| = k_i \;\; \forall\, i\,,\; \bigcup_{i=1}^{s} X_i = \underline{n} \right\}$$

si ha che $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s}$ è il numero di elementi di $\mathcal{P}_{k_1,k_2,\dots,k_s}(\underline{n})$.

Dimostrare che $$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} = \frac{n!}{k_1\, k_2! \cdots k_s!} \quad .$$

14 — <u>*Formula della potenza del multinomio:*</u> Dimostrare che

$$\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_s\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} x_1^{k_1}\, x_2^{k_2} \cdots x_s^{k_s}$$

<u>Suggerimento:</u> *Si utilizzi direttamente il significato combinatorio dei numeri* $\binom{n}{k}$, *OPPURE (più macchinoso...) si faccia induzione su $s \geq 2$ (quindi con $s = 2$ come base dell'induzione) utilizzando la formula del binomio di Newton data nell'esercizio* **8** *qui sopra — che corrisponde esattamente al caso $s = 2$ — per il passo induttivo.*