1. Sia R un anello e sia $a \in R$ un elemento invertibile. Siano $b, c \in R$. Dimostrare che se $ba = ca$, allora $b = c$. Dedurne che a ha un unico inverso moltiplicativo.
2. Siano A e B anelli. Dimostrare che $(A \times B)^* = A^* \times B^*$.
3. Sia $f : R \longrightarrow R'$ un omomorfismo di anelli.
   (a) Dimostrare che si ha che $f(R^*) \subset R'^*$ e che la restrizione di f a R^* è un omomorfismo di gruppi $R^* \longrightarrow R'^*$
   (b) Dimostrare che f^* è iniettivo se f è iniettivo.
   (c) È vero che f^* è suriettivo se f è suriettivo?
4. Sia R un anello. Dimostrare che esiste unico un omomorfismo di anelli $\mathbf{Z} \longrightarrow R$. Dimostrare che esiste unico un omomorfismo di anelli $R \longrightarrow \{0\}$. Qua $\{0\}$ indica l'anello zero.
5. (*Anello di Boole*) Sia X un isieme e sia $P(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X. Definiamo per $A, B \in P(X)$
$$A + B = A \Delta B \ (= \ A \cup B - A \cap B),$$
$$A \cdot B = A \cap B.$$
   Dimostrare che con quest'addizione e moltiplicazione $P(X)$ diventa un anello commutativo.
6. Sia $\mathbf{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss. Siano $a, b \in \mathbf{Z}$ e sia $z = a + bi \in \mathbf{Z}[i]$. Far vedere che z è invertibile se e soltanto se $a^2 + b^2 = 1$. Calcolare $\mathbf{Z}[i]^*$.
7. (a) Sia $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che f è l'identità.
   (b) Sia $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che f è l'identità.
   (c) Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che $f(x) > 0$ se $x > 0$ e che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha che $f(x) > f(y)$ se $x > y$.
   (d) Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ un omomorfismo di anelli. Far vedere che f è l'identità.
   (e) Esibire un omomorfismo di anelli $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ che non è l'identità.
8. Sia $\mathbf{H}$ il corpo dei quaternioni.
   (a) Siano $x, y \in \mathbf{H}$ dati da $x = 1 + i + j - k$ e $y = -2 - j + k$.
   Calcolare $x + y$, $x\overline{y}$, $1/x$ e $\overline{y}^2$.
   (b) Dimostrare che $x \in \mathbf{H}$ ha la proprietà che $xy = yx$ per ogni $y \in \mathbf{H}$ se e solo se $x \in \mathbf{R}$.

   Un quaternione "puro" è un quaternione della forma $bi + cj + dk$ con $b, c, d \in \mathbf{R}$. I quaternioni puri formano quindi un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale di dimensione 3.
   (c) Dimostrare x è un quaternione puro se e solo se $\overline{x} = -x$.
   (d) Dimostrare che i quaternioni puri x di norma $x\overline{x} = 1$ soddisfano $x^2 = -1$ e che formano una sfera nello spazio vettoriale della parte (d). Il polinomio $X^2 + 1$ ha quindi infiniti zeri in $\mathbf{H}$.
9. Il numero 2017 è primo. Quante radici primitive ci sono in $\mathbf{Z}_{2017}^*$?
10. Dimostrare che per nessun anello il gruppo addittivo è isomorfo al gruppo $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. (Sugg: considerare l'elemento 1 dell'anello)