1. Siano G_1 e G_2 due gruppi con elementi neutri e_1 respettivamente e_2. Dimostrare che $G_1 \times \{e_2\}$ e $\{e_1\} \times G_2$ sono sottogruppi normali di $G_1 \times G_2$.

2. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che se H è abeliano, allora il sottogruppo $[G, G]$ dei commutatori è contenuto in $\ker(f)$.

3. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che $\ker f$ è un sottogruppo normale di G. È sempre vero che l'immagine di f è un sottogruppo normale di H?

4. Siano H_1 e H_2 due sottogruppi normali di un gruppo G. Dimostrare che $H_1 \cap H_2$ è anche un sottogruppo normale di G.

5. Sia G un gruppo e siano H, H' due sottogruppi normali di G con la proprietà che G/H e G/H' sono abeliani. Dimostrare che $G/(H \cap H')$ è abeliano.

6. Sia G un gruppo e siano $H \subset G$ un sottogruppo di G. Sia $H' \subset H$ un sottogruppo di H.
   (a) Dimostrare che H' è anche un sottogruppo di G.
   (b) Esibire un esempio dove H' è un sottogruppo normale di H e H è un sottogruppo normale di G, ma H' non è un sottogruppo normale di G. (Sugg. esibire sottogruppi opportuni di $G = D_4$.)

7. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.

8. Sia G un gruppo con la proprietà che $G/Z(G)$ è ciclico. Dimostrare che G è abeliano.

9. Sia $n \geq 2$. Determinare il centro e il sottogruppo dei commutatori del gruppo diedrale D_n.

10. (Primo teorema di isomorfismo) Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi e sia $N = \ker f$. Dimostrare che la mappa $\overline{f} : G/N \longrightarrow H$ definita da $\overline{f}(gN) = f(g)$ induce un isomorfismo ben definito fra G/N e l'immagine di f .

11. (a) Dimostrare che un sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico. Dimostrare che un quoziente di un gruppo ciclico è ciclico.
    (b) Sia $m \in \mathbf{Z}_{>0}$. Dimostrare che per ogni sottogruppo H di $\mathbf{Z}$ esiste $n \in \mathbf{Z}$ tale che $H = \{kn : k \in \mathbf{Z}\}$. Dimostrare che per $n \neq 0$ si ha che $\mathbf{Z}/H = \mathbf{Z}_n$. Determinare la struttura di $\mathbf{Z}/H$ quando $n = 0$.
    (c) Dimostrare che per ogni sottogruppo H di $\mathbf{Z}_m$ esiste un divisore d di m tale che $H = \{\overline{a} \in \mathbf{Z}_m : d \text{ divide } a\}$. Enumerare i sottogruppi di $\mathbf{Z}_{12}$.

12. Sia G il gruppo moltiplicativo $\mathbf{C}^*$ e sia $S = \{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$.
    (a) Dimostrare che S è un sottogruppo di $\mathbf{C}^*$.
    (b) Chi sono le classi laterali di S?
    (c) Dimostrare che il gruppo $\mathbf{C}^*/S$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.