1. Siano $d, n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ e supponiamo che d sia un divisore di n.
   (a) Dimostrare che l'applicazione $r : \mathbf{Z}_n \longrightarrow \mathbf{Z}_d$ data da $r(a \pmod n) = (a \pmod d)$ è un'omomorfismo ben definito. Far vedere che è suriettivo.
   (b) Dimostrare che l'applicazione $r : \mathbf{Z}_n^* \longrightarrow \mathbf{Z}_d^*$ data da $r(a \pmod n) = (a \pmod d)$ è un'omomorfismo ben definito. Far vedere che è suriettivo.

2. Sia G un gruppo e sia $g \in G$. Sia $f : \mathbf{Z} \longrightarrow G$ l'applicazione definita da $f(n) = g^n$. Dimostrare che f è un omomorfismo e descrivere il nucleo e l'immagine in termini dell'ordine dell'elemento g.

3. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_8^* = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$. Determinare le classi laterali dei sottogruppi $H_1 = \{\overline{1}, \overline{3}\}$, $H_2 = \{\overline{1}, \overline{5}\}$ e di $H_3 = \{\overline{1}, \overline{7}\}$.

4. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ è isomorfo a $\mathbf{R}$.

5. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{31}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{2}$.
   (a) Quanti elementi ha H? Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{31}^*/H$?
   (b) Dimostrare che $\mathbf{Z}_{31}^*/H$ è ciclico.

6. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{R}^*/\{+1, -1\}$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbf{R}$.

7. Sia G il gruppo $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_8$ e sia H il sottogruppo generato dall'elemento v. Nei seguenti casi determinare l'ordine di v e determinare la struttura del gruppo quoziente G/H.
   (a) $v = (\overline{0}, \overline{2})$; (b) $v = (\overline{1}, \overline{0})$; (c) $v = (\overline{1}, \overline{2})$.

8. Sia $G = \mathbf{Z}_{20}^*$.
   (a) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{9}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
   (b) Sia H il sottogruppo generato da $\overline{19}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.

9. Sia G un gruppo e siano H e H' due sottogruppi di G con le seguenti proprietà:
   – $hh' = h'h$ per ogni $h \in H$, $h' \in H'$,
   – $H \cap H' = \{e\}$,
   – Per ogni $g \in G$ ci sono $h \in H$ e $h' \in H'$ tali che $g = hh'$.

   Dimostrare che l'applicazione
   $$f : H \times H' \longrightarrow G$$
   data da $f(h, h') = hh'$ è un isomorfismo.

10. Sia S il sottogruppo moltiplicativo $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ di $\mathbf{C}^*$. Dimostrare che
    $$\mathbf{C}^* \cong \mathbf{R}_{>0} \times S.$$
    (Sugg. utilizzare l'esercizio precedente.)