1. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono ideali o meno:
   (a) $\mathbf{R}$ di $\mathbf{C}$;
   (b) $\{f \in \mathbf{Z}[X] : f(0) = 1\}$ di $\mathbf{Z}[X]$;
   (c) $\{a + bi \in \mathbf{Z}[i] : a$ e b hanno la stessa parità$\}$ di $\mathbf{Z}[i]$.
   (d) $\{\overline{a} \in \mathbf{Z}_{289} : \overline{a}$ è divisore di zero$\}$ di $\mathbf{Z}_{289}$.

2. Siano A e B due anelli commutativi.
   (a) Dimostrare che $A \times \{0\}$ e $\{0\} \times B$ sono ideali dell'anello prodotto $A \times B$.
   (b) Calcolare somma, prodotto e intersezione degli ideali della parte (a).

3. Siano A e B due anelli commutativi.
   (a) Siano $I \subset A$ e $J \subset B$ ideali. Dimostrare che $I \times J$ è un ideale di $A \times B$.
   (b) Dimostrare che ogni ideale di $A \times B$ ha la forma $I \times J$ dove I è un ideale di A e J è un ideale di B.

4. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali di R. Dimostrare che $I \cup J$ è un ideale se e soltanto se $I \subset J$ oppure $J \subset I$.

5. Siano I, J ideali di un anello commutativo A. Dimostrare che se $I + J = A$, allora $IJ = I \cap J$.

6. Dimostrare che l'ideale (X, Y) dell'anello $\mathbf{Q}[X, Y]$ non è principale.

7. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[X]$, sia I l'ideale generato da $X^2 + 2$ e sia J l'ideale $(4, X)$.
   (a) Dimostrare che l'anello R/I è infinito.
   (b) Dimostrare che l'anello quoziente R/J ha quattro elementi.
   (c) Sia K l'ideale $I + J$. L'anello R/K, quanti elementi ha?
   (d) Sia L l'ideale J^2 (cioè $J \cdot J$). L'anello R/L, quanti elementi ha?

8. Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli commutativi. Dimostrare che l'applicazione $\varphi : A/\ker f \longrightarrow f(A)$ definita da $\varphi(\overline{x}) = f(x)$ è un isomorfismo di anelli ben definito.

9. (a) Dimostrare che la mappa $\Psi : \mathbf{Z}[X] \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ data da $f \mapsto f(0) \pmod 2$ è un omomorfismo di anelli suriettivo.
   (b) Dimostrare che $\ker(\Psi)$ è l'ideale $(2, X)$.
   (c) Dimostrare che c'è un isomorfismo

$$\mathbf{Z}[X]/(2, X) \cong \mathbf{Z}_2.$$

10. Sia R l'insieme delle successioni $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $a_k \in \mathbf{Q}$ per ogni $k \geq 1$, con somma e prodotto definiti come segue: $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} + \{b_k\}_{k=1}^{\infty} = \{a_k + b_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \cdot \{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{a_k b_k\}_{k=1}^{\infty}$. Sia $S = \{\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in R :$ per ogni $\epsilon \in \mathbf{Q}_{>0}$ esiste un indice k tale che $|a_i - a_j| < \epsilon$ per ogni $i, j > k\}$. Sia $I = \{\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in R :$ per ogni $\epsilon \in \mathbf{Q}_{>0}$ esiste un indice k tale che $|a_i| < \epsilon$ per ogni $i > k\}$.
   (a) Dimostrare che R è un anello commutativo.
   (b) Dimostrare che S è un sottoanello di R.
   (c) Dimostrare che I è un ideale di S.
   (d) Chi è l'anello quoziente S/I?