G. Pareschi

GLOSSARIO DI NOZIONI PRELIMINARI SUGLI INSIEMI

1. Insiemi numerici

Tra i protagonisti del corso, avremo i seguenti insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, l'insieme dei numeri *naturali.*

$\mathbb{Z} = \{..., -n, .., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$, l'insieme dei numeri *interi.*

$\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri *razionali.*

$\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri *reali.*

2. Operazioni sugli insiemi

Durante il corso useremo liberamente il linguaggio degli insiemi: unione, intersezione, complementare etc. Ecco un elenco:

- Dati due insiemi A e B, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$.

- Dati due insiemi A e B, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

- Dato un insieme A e $B \subseteq A$, l'insieme complementare di B in A è $\mathcal{C}_A(B) = \{x \in A | \, x \notin B\}$.

- Dato un insieme A e due suoi sottoinsiemi $B, C \subseteq A$, il sottoinsieme differenza è
$B - C = \{x \in B | \, x \notin C\} = B \cap \mathcal{C}_A(C)$.

- Differenza simmetrica di due insiemi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

- Prodotto cartesiano di due insiemi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A\, ,\ b \in B\ \}$. Allo stesso modo, se abbiamo un numero finito di insiemi $A_1, ..., A_k$, il loro prodotto cartesiano è
$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) \mid a_i \in A_i\ ,\ \forall i = 1, \ldots, k\}$.

3. Famiglie di insiemi

Sia I un insieme. Una *famiglia di insiemi a indici in* I è il dato di un insieme A_i per ogni $i \in I$, e si denota $\big\{A_i\big\}_{i \in I}$.

Esempio 3.1. Dato un numero naturale i, denotiamo $\mathbb{N}_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq i\}$. Ad esempio, se $i = 21$, $\mathbb{N}_{21}$ è l'insieme dei numeri naturali maggiori o uguali a 21.
Abbiamo quindi la famiglia $\{\mathbb{N}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. In questo esempio l'insieme degli indici I è $\mathbb{N}$.
Altro esempio: la famiglia $\{\mathbb{N}_i\}_{i \in \{7,8,9,13\}}$. In altre parole, stiamo considerando gli insiemi $\mathbb{N}_7$, $\mathbb{N}_8$, $\mathbb{N}_9$ e $\mathbb{N}_{13}$. In questo caso l'insieme degli indici I è $\{7, 8, 9, 13\}$.

Così come si fa l'unione e l'intersezione di *due* insiemi, si può fare l'unione e l'intersezione di una *famiglia* di insiemi. Data una famiglia di insiemi $\big\{A_i\big\}_{i \in I}$,

- Unione: $\cup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ tale che } x \in A_i\}$.

- Intersezione: $\cap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i\ \forall i \in I\}$.

Esercizio 3.2. Usando la notazione dell'esempio 3.1 calcolare $\cap_{i\in\{3,5,7,12\}}\mathbb{N}_i$, $\cup_{i\in\{3,5,7,12\}}\mathbb{N}_i$, $\cap_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{N}_i$, $\cup_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{N}_i$.

Esempio/Esercizio 3.3. Consieriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'intervallo reale $[-1/n, 1/n]$. Calcoliamo $\cup_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n]$ e $\cap_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n]$.

L'unione è facile. Poichè $[-1/n, 1/n] \subseteq [-1, 1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n] = [-1, 1]$.

L'intersezione richiede un po' di riflessione in più. Il risultato è che $\cap_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n] = \{0\}$. Infatti, certamente $0 \in [-1/n, 1/n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n]$.
D'altra parte, dato $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste sempre un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \notin [-1/n, 1/n]$ (è sufficiente prendere $1/n < |x|$, cioè $n > 1/|x|$). Dunque, per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $x \notin \cap_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n]$. Quindi $\cap_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n] = \{0\}$.

4. Insieme delle parti

Sia A un insieme. L'*insieme delle parti di A* è l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A:
$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Esempio 4.1. Sia $A = \emptyset$. Allora $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (quindi, l'insieme delle parti dell'insieme vuoto non è vuoto. Ha un elemento: l'insieme vuoto).
Sia $X = \{x\}$. Allora $\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{x\}\big\}$.
Sia $A = \{1, 2\}$. Allora $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.
Sia $X = \{a, b, c\}$. Allora $\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$.

Esercizio 4.2. (a) Scrivere tutti gli elementi di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.
(b) Scrivere tutti gli elementi di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.