1. Principio di induzione

Il Principio di Induzione (che dovreste anche avere incontrato nel Corso di Analisi I) consente di dimostrare Proposizioni il cui enunciato è in funzione di un numero che varia nell'insieme dei numeri naturali (o, più generalmente in sottoinsiemi del tipo $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$, dove $a \in \mathbf{Z}$ è un fissato numero intero). Ad esempio:
(1) *per ogni $n \in \mathbb{N}$, la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $n(n+1)/2$,*
oppure:
(2) *ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 è prodotto di numeri naturali primi.*
Nel caso (1) l'enunciato è:
$\mathcal{P}(n)$: *la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $n(n+1)/2$,*
o, in simboli,
$\sum_{1=1}^{n} i = n(n+1)/2$.
Tale enunciato dipende dalla "variabile" n, che varia nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Nel secondo caso, l'enunciato è
$\mathcal{P}(n)$: *ogni numero naturale $n \geq 2$ è prodotto di numeri primi*
o, in simboli,
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \exists h \in \mathbf{N}$ *e* $p_1, .., p_h \in \mathbb{N}$, *primi, tali che* $n = p_1 \cdots p_h$.
Anche in questo caso l'enunciato dipende da n, che varia nell'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$.

Parlando informalmente, il Principio di Induzione è il "Principio della scala infinita". Supponiamo di avere un scala infinita, i cui gradini corrispondono ai numeri naturali. In questo contesto il Principio di Induzione si potrebbe enunciare così: supponiamo di sapere che una data persona: (a) è in grado di salire il primo gradino; (b) se è ad un certo gradino, diciamo n, allora è in grado di salire sul gradino successivo (diciamo $n+1$). Allora questa persona è in grado di salire ogni gradino della scala all'infinito (cioè per ogni n).

Passiamo alle formulazioni rigorose e alle corrispondenti dimostrazioni.

Proposizione 1.1 (Principio di Induzione)**.** Sia $a \in \mathbb{Z}$ e sia $P \subseteq \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$. Se l'insieme P verifica le seguenti condizioni:
(a) $a \in P$;
(b) sia $n \geq a$. Se $n \in P$ allora $n+1 \in P$;

allora $P = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$.

Proof. Dimostrazione per assurdo. Consideriamo l'insieme complementare di P nell'insieme $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$. Consideriamo cioè l'insieme $Q = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a \text{ e } n \notin P\}$. Dobbiamo dimostrare che, se valgono le proprietà (a) e (b), allora $Q = \emptyset$.

Supponiamo che Q non sia vuoto. Osserviamo che Q è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri interi limitato inferiormente (perchè Q un sottoinsieme dell'insieme $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$). Allora Q possiede certamente un elemento minimo q_0[1]. Certamente $q_0 > a$, per la proprietà (a). Ne segue che anche

$$q_0 - 1 \in Q \tag{1}$$

[1] Insiemi X dotati di una relazione d'ordine (vedi lezioni successive) con la proprietà seguente: *ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ limitato inferiormente possiede un elemento minimo* sono detti insiemi *ben ordinati.* Quindi, nella dimostrazione, stiamo usando il fatto che $\mathbb{Z}$ è *ben ordinato.* Ad esempio, $\mathbb{R}$ *non è ben ordinato* (esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, ad esempio la seniretta aperta $(0, +\infty)$, che non hanno elemento minimo).

(altrimenti, per la proprietà (b), se non fosse così, $q_0 = (q_0 - 1) + 1$ apparterebbe a P, e quindi non a Q). La (1) è in contrasto con il fatto che q_0 sia il minimo di Q. Quindi, l'ipotesi che Q non sia vuoto ci porta ad una contraddizione. Dunque Q deve essere necessariamente vuoto. $\square$

Caso particolare 1.2. Sia $P \subset \mathbb{N}$. Se P verifica le seguenti condizioni:
(a) $1 \in P$;
(b) sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n \in P$ allora $n + 1 \in P$;

allora $P = \mathbb{N}$.

Proof. È la Proposizione precedente con $a = 1$. $\square$

Come anticipato sopra, il Principio di Induzione si usa spesso nella forma seguente

Versione 1.3. Sia $a \in \mathbb{Z}$ e $\forall n \geq a$, sia $\mathcal{P}(n)$ una proposizione *(ossia un enunciato che o è vero o è falso)*. Se
(a) $\mathcal{P}(a)$ è vera;
(b) $\forall n \geq a$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora $\mathcal{P}(n + 1)$ è vera;

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq a$.

Proof. Si applica la Proposizione 1.1 all'insieme

$$P = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq a, \quad \text{e } \mathcal{P}(n) \text{ è } \quad \text{vera}\}$$

$\square$

Esempio 1.4. Torniamo all'esempio (1) dell'introduzione: *dimostriamo, per induzione, che,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *la somma dei primi* n *numeri naturali è* $n(n + 1)/2$. In simboli,

$$\sum_{1=1}^{n} i = \frac{n(n + 1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

In questo caso l'enunciato dipendente da $n \in \mathbb{N}$ è

$$\mathcal{P}(n): \quad \sum_{1=1}^{n} i = \frac{n(n + 1)}{2} \tag{2}$$

Cominciamo con il verificare il
Passo base: $\mathcal{P}(1)$ è vera. In altre parole

$$\sum_{1=1}^{1} i = \frac{1(1 + 1)}{2} = 1$$

che è ovvio.
Compiamo ora il *passo induttivo*, cioè la dimostrazione dell'implicazione $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$. In questo caso, dobbiamo dimostrare la seguente proposizione

$$\textit{Ipotesi induttiva:} \qquad \text{Se} \quad \sum_{1=1}^{n} i = \frac{n(n + 1)}{2} \tag{3}$$

allora

$$\textit{Tesi:} \quad \sum_{1=1}^{n+1} i = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \tag{4}$$

Dimostrazione : Si ha che $\sum_{1=1}^{n+1} i = \sum_{1=1}^{n} i + (n + 1)$. Per ipotesi induttiva,

$$\sum_{1=1}^{n} i + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1).$$

Ma, portando a denominatore comune,
$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
In definitiva abbiamo dimostrato che, se vale l'ipotesi induttiva (3) allora
$$\sum_{1=1}^{n+1} i=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
Abbiamo quindi stabilito il *passo induttivo*, cioè che (3) implica (4).

A volte è utile usare la seguente leggera variante del Principio di Induzione

Variante 1.5 (Variante del Principio di Induzione)**.** Sia $a \in \mathbb{Z}$ e sia $P \subseteq \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$. Se l'insieme P verifica le seguenti condizioni:
(a) $a \in P$;
(b) Sia $n \geq a$. Se $\{m \in \mathbb{Z} \mid a \leq m \leq n\} \subset P$ allora $n+1 \in P$;

allora $P = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$.

Proof. La dimostrazione è del tutto simile a quella della Proposizione 1.1. Consideriamo l'insieme complementare di P nell'insieme $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$. Consideriamo cioè l'insieme
$Q = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a \ \text{ e } \ n \notin P\}$. Dobbiamo dimostrare che, se valgono le proprietà (a) e (b), allora $Q = \emptyset$. Osserviamo che Q è limitato inferiormente, poichè Q un sottoinsieme dell'insieme $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$.

Supponiamo che Q non sia vuoto. Allora, poichè Q è un sottoinsieme limitato inferiormente dell'insieme dei numeri interi, Q possiede un elemento minimo q_0. Certamente $q_0 > a$, per la proprietà (a). Ne segue anche che esiste un $m \in Q$ tale che $a \leq m \leq q_0$ (altrimenti, per la proprietà (b), se non fosse così, q_0 apparterebbe a P, e quindi non a Q). Ciò è in contrasto con il fatto che q_0 sia il minimo di Q. Quindi Q deve essere necessariamente vuoto. □

Versione 1.6. Sia $a \in \mathbb{Z}$ e $\forall n \geq a$, sia $\mathcal{P}(n)$ una proposizione *(ossia un enunciato che o è vero o è falso)*. Se
(a) $\mathcal{P}(a)$ è vera;
(b) $\forall n \geq a$, se $\mathcal{P}(m)$ è vera $\forall m$ tale che $a \leq m \leq n$, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera;

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq a$.

Proof. Come quella della Versione 1.3. □

La differenza dalla Versione 1 sta nell'ipotesi induttiva. Mentre nella Versione 1 tale ipotesi è che $\mathcal{P}(n)$ è vera, nella versione 2 è che $\mathcal{P}(m)$ è vera per ogni m tale che $a \leq m \leq n$.

Esempio 1.7. Cerchiamo di apprezzare la leggera differenza tra le due versioni nell'esempio (2) dell'introduzione: dimostriamo, per induzione, che ogni numero naturale maggiore o uguale a due è prodotto di numeri primi (non necessariamente distinti, chiaramente).
In simboli,
$\forall n \geq 2$, $\exists h \in \mathbb{N}$ e $p_1, .., p_h \geq 2$, numeri naturali primi, tali che $n = p_1, .., p_h$.
In questo caso l'enunciato dipendente da $n \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ è
$\mathcal{P}(n):$ *$\exists h \in \mathbb{N}$ e $p_1, .., p_h \geq 2$, numeri naturali primi, tali che $n = p_1, .., p_h$.*

Passo base: $\mathcal{P}(2)$ è vera. In altre parole, il numero 2 è prodotto di numeri primi.
Questo è ovvio perchè 2 è primo (in simboli $2 = p_1 \cdot \cdot p_h$ con $h = 1$ e $p_1 = 2$).

Passo induttivo: $\mathcal{P}(m)$ vera , $\forall m$ tale che $2 \leq m \leq n$, $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vera.
In questo caso dobbiamo dimostrare la seguente Proposizione:

(5)
Ipotesi induttiva: Se $\forall m$ tale che $2 \leq m \leq n$ $\exists h \in \mathbb{N}$ e $p_1, .., p_h$ numeri primi tali che $m = p_1 \cdots p_h$ allora

(6) *Tesi:* $\exists k \in \mathbb{N}$ e $p_1, .., p_k$ numeri primi tali che $n + 1 = p_1 \cdots p_k$

Dimostrazione : Se $n + 1$ è primo allora la Tesi è ovvia. Se invece $n + 1$ non è primo, si ha che che $n + 1 = a\, b$, con $2 \leq a, b \leq n$. Per ipotesi induttiva, a e b sono prodotti di primi. Quindi anche $n + 1 = a\, b$ lo è.
In simboli: per ipotesi induttiva $\exists h_a \in \mathbb{N}$ e $p_1, .., p_{h_a}$ numeri primi tali che $a = p_1 \cdots p_{h_a}$ e $\exists h_b \in \mathbb{N}$ e $p_1, .., p_{h_b}$ numeri primi tali che $b = p_1 \cdots p_{h_b}$. Dunque

$$n + 1 = a\, b = p_1 \cdots p_{h_a} \cdot p_1 \cdots p_{h_b}.$$

2. Raccolta di alcuni esercizi d'esame sul principio di induzione

Attenzione: questi sono alcuni esercizi d'esame, sugli argomenti di questa dispensa. Non sono una selezione di quelli che ritengo più significativi, ma solamente quelli tratti daglia appelli di cui sono in possesso del file sorgente. Siete quindi invitati a cercare di risolvere gli esercizi, su questi argomenti, tratti dai TUTTI gli esami degli anni passati (oltre agli esercizi assegati, naturalmente).

Esercizio 2.1. Sia $a \in \mathbf{R}$ tale che $0 < a < 1$. Dimostrare per induzione che $(1 - a)^n < \frac{1}{1+na}$, per ogni $n \geq 1$.

Soluzione. Sia $a \in (0, 1)$. Passo base: Per $n = 1$ la disuguaglianza da dimostrare e': $1 - a < \frac{1}{1+a}$, che si verifica osservando che, moltiplicando e dividendo il primo membro per $1 + a$, essa è equivalente a $\frac{1-a^2}{1+a} < \frac{1}{1+a}$, e quindi a
Passo induttivo: l'ipotesi e': $(1 - a)^n < \frac{1}{1+na}$. La tesi e': $(1 - a)^{n+1} < \frac{1}{1+(n+1)a}$.
Per dimostrare la tesi, si scrive il primo membro $(1 - a)^{n+1} = (1 - a)^n(1 - a)$. Per ipotesi induttiva (e usando che $1-a > 0$), si ha che $(1-a)^{n+1} = (1-a)^n(1-a) < \frac{1-a}{1+na}$. Dunque, per dimostrare la tesi, e' sufficiente dimostrare che: $\frac{1-a}{1+na} \leq \frac{1}{1+(n+1)a}$, per ogni $n \geq 1$. Portando i membri di quest'ultima disuguaglianza a comune denominatore, si vede che essa e' equivalente a

$$\frac{(1 - a)(1 + (n + 1)a)}{(1 + na)(1 + (n + 1)a} \leq \frac{1 + na}{(1 + na)(1 + (n + 1)a)},$$

e quindi a: $(1 - a)(1 + (n + 1)a) < 1 + na$, cioé: $1 + na - (n + 1)a^2 < 1 + na$, che è banalmente vera per ogni $n \geq 1$. $1 - a^2 < 1$.

Esercizio 2.2. Sia h un numero reale diverso da 1.
a) Dimostrare per induzione che $\sum_{i=0}^{n} h^i = \frac{h^{n+1}-1}{h-1}$ per ogni $n \geq 0$.
b) Verificare esplicitamente tale formula per $h = -\frac{1}{2}$ e $n = 2$.

SOLUZIONE. Verifichiamo l'uguaglianza per $n = 0$: $\sum_{1=0}^{0} h^i = h^0 = 1$, $\frac{h^1-1}{h-1} = 1$.

Supponiamo ora che l'uguaglianza sia vera per un $n \in \mathbf{N}$ e dimostriamo che la stessa uguaglianza è vera per $n + 1$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} h^i = \sum_{i=0}^{n} h^i + h^{n+1} = \frac{h^{n+1} - 1}{h - 1} + h^{n+1} = \frac{h^{n+1} - 1 + (h - 1)h^{n+1}}{h - 1} =$$

$$\frac{h^{n+1}\,h + h^{n+1} - h^{n+1} - 1}{h-1} = \frac{h^{n+2}-1}{h-1}$$

Quindi l'uguaglianza è vera per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 2.3. *Si definisca:* $w_0 = 2$, $w_1 = 3$ *e, per ogni* $n \geq 2$, $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$. *Dimostrare che* $w_0^2 + w_1^2 + \cdots + w_n^2 = w_n w_{n+1} - 2$ *per ogni* $n \geq 1$.

Si dimostra l'asserzione richiesta per induzione.
Per $n = 1$ è vera: $w_0^2 + w_1^2 = 13$ e $w_1 w_2 - 2 = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 13$.
Passo induttivo: assumiamo per ipotesi che $w_1^2 + \ldots + w_n^2 = w_n w_{n+1} - 2$ e dimostriamo che

$$w_1^2 + \ldots + w_n^2 + w_{n+1}^2 = w_{n+1} w_{n+2} - 2.$$

Per l'ipotesi induttiva abbiamo

$$w_1^2 + \ldots + w_n^2 + w_{n+1}^2 = w_n w_{n+1} - 2 + w_{n+1}^2 = w_{n+1}(w_n + w_{n+1}) - 2. \qquad (*)$$

Poiché per definizione vale $w_{n+2} = w_n + w_{n+1}$, l'espressione (*) è uguale a $w_{n+1} w_{n+2} - 2$, come richiesto.

Esercizio 2.4. *Dimostrare per induzione che* $n^3 + 5n$ *è divisibile per 6, per ogni numero naturale* $n \geq 1$.

Per $n = 1$ abbiamo $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$. Dunque $P(1)$ è vera.
Facciamo vedere che $P(n) \to P(n+1)$:
assumendo $n^3 + 5n$ divisibile per 6, anche $(n+1)^3 + 5(n+1)$ risulta divisibile per 6. Scriviamo

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = n^3 + 5n + 3n(n+1) + 6$$

e osserviamo che, poiché $n(n+1)$ è sempre divisibile per due (uno fra n ed $n+1$ è pari), $3n(n+1)$ è sempre divisibile per 6. Ne segue che n^3+5n divisibile per 6 implica $(n+1)^3+5(n+1)$ divisibile per 6, come richiesto.

Esercizio 2.5. *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente* [2] *definita da* $F(1) = 1$, $F(n) = n + F(n-1)$, *per* $n \geq 1$.
(a) Calcolare $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$.
(b) Dimostrare per induzione che $F(n) = \frac{n^2+n}{2}$. (a) $F(1) = 1$, $F(2) = 2 + F(1) = 3$, $F(3) =$

$3 + F(2) = 6$, $F(4) = 4 + F(3) = 10$. (b) $P(1): \quad F(1) = \frac{1^2+1}{2}$ (vera). Ipotesi induttiva:

$$P(n): \quad F(n) = \frac{n^2+n}{2}.$$

Tesi:

$$P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1): \quad F(n+1) = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}.$$

Per definizione $F(n+1) = n + 1 + F(n)$. Per ipotesi induttiva $F(n) = \frac{n^2+n}{2}$. Da cui

$$F(n+1) = n + 1 + \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2},$$

come richiesto.

[2] Una funzione, definita su $\mathcal{N}$ (o, più generalmente, su un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$), è *definita ricorsivamente, o induttivamente* se si definisce $f(1)$, e poi, dato $n \in \mathbf{N}$, si defisce $f(n)$ in funzione di $f(1), ..., f(n-1)$

Esercizio 2.6. *Dimostrare per induzione che* $n^3 + 3n^2 + 5n$ *è divisibile per 3, per ogni* $n \geq 1$. Chiamiamo $P(n)$ la proposizione "$n^3 + 3n^2 + 5n$ *è divisibile per* 3".

$P(1)$ è vera: infatti $1 + 3 + 5 = 9$ è divisibile per 3.
Dimostriamo che se $P(n)$ è vera (ipotesi induttiva), anche $P(n + 1)$ è vera:

$$(n + 1)^3 + 3(n + 1)^3 + 5(n + 1) = \ldots\ldots = (n^3 + 3n^2 + 5n) \ + \ 3n^2 + 9n + 9.$$

È evidente che $3n^2 + 9n + 9$ è divisibile per 3; dunque assumendo $n^3 + 3n^2 + 5n$ divisibile per 3, anche $(n + 1)^3 + 3(n + 1)^3 + 5(n + 1)$ è divisibile per 3, come richiesto.

Esercizio 2.7. *Dimostrare per induzione che* $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$, *per ogni numero naturale* $n \geq 1$. Per $n = 1$, l'enunciato è $P(1) : \ 1 \leq 1$, ed è vero.

Facciamo vedere che dall'enunciato ennesimo $P(n) : \ 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$, segue l'enunciato $(n + 1)$-simo $P(n + 1) : \ 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Se $P(n)$ è vero, abbiamo intanto la stima

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Se facciamo vedere che

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}, \tag{$*$}$$

abbiamo dimostrato l'enunciato $P(n + 1)$. La disequazione (*) è equivalente a

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

che è soddisfatta per ogni numero naturale $n \geq 1$. La dimostrazione è completa.

Esercizio 2.8. Trovare una formula generale per la somma $1+2+4+8+16+\ldots+2^n$. Dimostrare per induzione che la formula trovata è quella giusta. Si tratta di una serie geometrica. Per $n = 1$,

2, 3, 4, ... si trova che la somma è uguale rispettivamente a 3, 7, 15, 31, ... e si riconoscono le potenze di 2 meno 1. La formula cercata è quindi $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n = s_n = 2^{n+1} - 1$.

Dimostriamo la validità della formula per induzione: per $n = 1$ abbiamo che $1 + 2 = s_1 = 2^2 + 1$. Questo è corretto. Supponendo che la formula valga per n, abbiamo che $s_{n+1} = s_n + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$. Vediamo che la formula vale anche per $n + 1$, come richiesto.

Esercizio 2.9. Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ per ogni $n \geq 1$.

Per $n = 1$ l'affermazione è vera. Supponendo l'affermazione vera per $n \in \mathbb{N}$ facciamo adesso vedere che vale anche per $n + 1$. Abbiamo che $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Dobbiamo dimostrare che questo è $\leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Per l'ipotesi d'induzione abbiamo che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$. Basta quindi dimostrare che $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Questo segue dal fatto che $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Esercizio 2.10. I numeri di Fibonacci F_n sono definiti da $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ e induttivamente da $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per $n \geq 2$.
(a) Calcolare F_5.

(b) Dimostrare per induzione che $\mathrm{mcd}(F_{n-1}, F_n) = 1$ per ogni $n \geq 1$.

(a) $F_2 = F_0 + F_1 = 2$, $F_3 = F_1 + F + 2 = 3$, $F_4 = F_2 + F_3 = 5$, $F_5 = F_3 + F_4 = 8$.
(b) $n = 1$: $\mathrm{mcd}(F_0, F_1) = \mathrm{mcd}(1, 1) = 1$.
Passo induttivo: supponiamo che $\mathrm{mcd}(F_{n-1}, F_n) = 1$. Si deve dimostrare che $\mathrm{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$. Sia m un numero naturale che divide sia F_n che $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Allora m divide anche la differenza $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$. Quindi m divide sia F_n che F_{n-1} e dunque, per l'ipotesi induttiva, $m = 1$. L'asserzione è dimostrata

Esercizio 2.11. Dimostrare per induzione che 21 divide $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. La formula vale per $n = 1$, perché abbiamo che $4^2 + 5^1 = 21$. Per dimostrare la formula per $n + 1$, scriviamo

$$4^{n+2} + 5^{2(n+1)-1} = 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) - 4 \cdot 5^{2n-1} + 5^{2(n+1)-1} =$$
$$= 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) - 5^{2n-1}(-4 + 25) = 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21 \cdot 5^{2n-1}.$$

Siccome per ipotesi la formula vale per n, il fattore $4^{n+1}+5^{2n-1}$ è divisibile per 21. Concludiamo che l'ultima espressione è divisibile per 21 e quindi che la formula vale per $n + 1$.

Esercizio 2.12. Siano $G_n \in \mathbb{Z}$ definiti ricorsivamente da $G_1 = 1$, $G_2 = 1$ e $G_n = G_{n-1} + 3G_{n-2}$ per $n \geq 3$.
(a) Calcolare G_5.
(b) Dimostrare per induzione che $G_{n+1}^2 - G_n G_{n+2} = (-3)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

(a). Abbiamo che $G_3 = 1 + 3 \cdot 1 = 4$, $G_4 = 4 + 3 \cdot 1 = 7$ e quindi $G_5 = 7 + 3 \cdot 4 = 19$.
(b) Siccome abbiamo che $G_2^2 - G_1 G_3 = 1^2 - 1 \cdot 3 = -2$, l'affermazione è corretta per $n = 1$. Supponiamo adesso che la formula valga per n e dimostriamola per $n + 1$. Abbiamo che

$$G_{n+2}^2 - G_{n+1}G_{n+3} = G_{n+2}(G_{n+1} + 3G_n) - G_{n+1}(G_{n+2} + 3G_{n+1}) =$$
$$= 3(G_{n+2}G_n - G_{n+1}^2) = -3(-3)^n = (-3)^{n+1}$$

Nell'ultimo passaggio usiamo l'ipotesi induttiva, ossia l'uguaglianza $G_{n+1}^2 - G_n G_{n+2} = (-3)^n$.

Esercizio 2.13. Dimostrare per induzione che $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n}{2n+1}$ per ogni $n \geq 1$. Per $n = 1$, la somma ha solo il termine con $k = 0$ ed è uguale a $1/3 = n/(2n + 1)$. Supponiamo adesso che la fomula valga per n e cerchiamo di dimostrarla per $n + 1$. Per induzione abbiamo che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

come richiesto.