1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Indichiamo con $\cap$, $\cup$ e $^-$ rispettivamente le operazioni di *intersezione*, *unione* e *complementare* in $\mathcal{P}(X)$. Verificare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole (verificare che sono soddisfatti gli assiomi).

2. Dato un numero naturale n, si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$. Supponiamo che $n = p_1 p_2 \cdot p_k$ sia prodotto di k primi *distinti.* Dato $a \in \mathbf{D}_n$, si definisca $\bar{a} := \frac{n}{a}$.
   (a) Verificare che $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, ^-)$ è un'algebra di Boole con 2^k elementi.
   (b) Sia $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Verificare che l'applicazione

   $$f \colon \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad k = p_{i_1} \ldots p_{i_\alpha} \mapsto \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_\alpha}\}$$

   è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biiettiva che rispetta le operazioni delle due algebre).

3. Sia dato l'insieme $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ con le operazioni $\oplus$, $\otimes$ e $^-$ definite nel seguente modo:

   $$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 1,$$

   $$1 \otimes 1 = 1, \quad 1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0, \quad \bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0.$$

   Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).

4. Sia dato l'insieme $\mathcal{A} = \{000, 010, 001, 100, 110, 101, 011, 111\}$ con le operazioni definite cifra per cifra come nell'esercizio precedente
   (a) Qual è l'identità per $\oplus$?
   (b) Qual è l'identità per $\otimes$?
   (c) Calcolare le seguenti espressioni:

   $$(001 \otimes 001) \oplus 100 = \ldots, (111 \oplus 001) \oplus 100 = \ldots, (001 \otimes \overline{001}) \oplus \overline{101 \otimes 010} = \ldots.$$

   (d) Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).
   (e) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Determinare la relazione di ordine parziale corrispondente, definita da x"$\leq$"y se $x \otimes y = x$.

5. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subset \mathbf{N}$ che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di B è finita oppure la cardinalità del complementare di B è finita. Dimostrare che $(\mathcal{B}, \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole.

6. Dimostrare che le algebre di Boole $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cap, \cup, ^-)$ e $(\mathcal{P}(\mathbf{R}), \cap, \cup, ^-)$ non possono essere isomorfe.

7. Sia $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ l'algebra di Boole del calcolo proposizionale.
   (a) Verificare che le operazioni $\wedge$ e $\vee$ sono associative;
   (b) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Verificare che la relazione di ordine parziale definita da A"$\leq$"B se $A \wedge B \Leftrightarrow A$ equivale a A"$\leq$"B se $A \Rightarrow B$. In altre parole, verificare che gli enunciati $A \wedge B \Leftrightarrow A$ e $A \Rightarrow B$ sono logicamente equivalenti.

8. Sia $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ un'algebra Booleana.
   (a) In un'algebra booleana valgono le Leggi di De Morgan:
   $\overline{(x \oplus y)} = \overline{x} \otimes \overline{y}, \qquad \overline{x \otimes y} = \overline{x} \oplus \overline{y}.$
   Enunciare Leggi di De Morgan per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.
   (b) In un'algebra booleana valgono le Leggi di assorbimento:

$a \otimes (a \oplus b) = a, \quad a \oplus a \otimes b = a.$

Enunciare Leggi di assorbimento per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.

(c) In un'algebra booleana valgono le Leggi di idempotenza:

$a \oplus a = a, \quad a \otimes a = a.$

Enunciare Leggi di idempotenza per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.

9. In un'algebra di Boole $(A, +, \cdot, ')$, dove $x+y$ denota la somma di due elementi, xy il prodotto e x' il complemento, scrivere ognuna delle seguenti espressioni come somma di prodotti completata:
   (a) $x'y((zt)' + x')'$; (b) $(x + x'y + xy'z)(x'z)$; (c) $x + x'yz$;
   (d) $(xy')'(xz + yz')'$; (e) $(xyz)'(x + y + z)'$; (d) $x(y + z)' + y'(xz)'$.

10. In un'algebra di Boole $(A, +, \cdot, ')$,
   (1) scrivere le seguenti espressioni come somma di prodotti completata:

   $$(a)\ x'y((zt)' + x')'; \qquad (b)\ (x + x'y + xy'z)(x'z); \qquad (c)\ x + x'yz.$$

   (2) scrivere le seguenti espressioni come somma di implicanti primi:

   $$(a)\ xyz+xy'z+x'yz+x'y'z+x'y'z'; \qquad (b)\ txyz'+tx'yz+tx'yz'+t'xyz+t'xy'z+t'x'yz+t'x'y'z.$$

   (3) scrivere le seguenti espressioni in forma *minimale*:

   $$(a)\ x'y+x'y'; \quad (b)\ xy+xy'; \quad (c)\ xy+xy'+x'y+xy'; \quad (d)\ xyz+xy'z+x'yz+x'y'z+x'y'z'.$$

11. Nell'algebra di Boole dell'esercizio 1, si considerino le espressioni booleane

   $$E(A, B, C) = A \cap B \bigcup A \cap C, \quad F(A, B, C) = A \cap B \cap C \bigcup B.$$

   (a) Disegnare i diagrammi di Venn delle due espressioni;
   (b) Determinare se E ed F sono somma di implicanti primi (aiutarsi col disegno).

12. Nell'algebra di Boole dell'esercizio 7, si consideri l'espressione booleana

   $$E(A, B, C) = A \bigvee \neg\big(A \wedge \neg B \bigvee \neg A \wedge B \bigvee \neg(B \wedge C)\big).$$

   (a) Esprimere $E(A, B, C)$ come somma di prodotti;
   (b) Determinare un'espressione minimale di $E(A, B, C)$.

13. In un'algebra di Boole $(A, +, \cdot, ')$, siano date le espressioni

   $$E: \quad xy'z + y'z' + xy'z', \qquad F: \quad xyz + x'y + xz.$$

   (a) determinare se E ed F sono equivalenti;
   (b) determinare se sono somma di implicanti primi;
   (c) determinare se sono minimali.