1. Per le seguenti relazioni R di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ stabilire quali sono simmetriche, riflessive o transitive.
   (a) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n = m\}$; (b) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : |n - m| = 5\}$;
   (c) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n \geq m\}$; (d) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n^2 \equiv m^2 \pmod 7\}$.

2. Sia $X = \{1,2,3,4\}$.
   (a) Esibire una relazione su di X, che sia riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.
   (b) Esibire una relazione su di X, che sia simmetrica, transitiva ma non riflessiva.
   (c) Esibire una relazione su di X, che sia riflessiva, transitiva, ma non simmetrica.

3. Sia $X = \{1,2,3,\ldots,30,31\}$. Consideriamo su X la relazione: xRy *se le date x e y del gennaio 2010 cadono nello stesso giorno della settimana (lunedi', martedi', etc...)* Dimostrare che R è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.

4. Sia $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.
   (i) Consideriamo su X la relazione: xRy *se $x + y$ è un numero pari*. Dimostrare che R è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.
   (ii) Consideriamo su X la relazione: xRy *se $x + y$ è un numero dispari*. Determinare se R è una relazione di equivalenza.

5. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a,b),(c,d)) \in A \times A : a + d = b + c\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Z}$ che associa la differenza $a - b$ alla classe di (a,b), è ben definita ed è una biezione.

6. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a,b),(c,d)) \in A \times A : ad = bc\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Q}_{>0}$ che associa la frazione a/b alla classe di (a,b), è ben definita ed è una biezione.

7. Dato l'insieme $A = \{x,y,z\}$, dire quali delle seguenti sono partizioni di A:

$$[\emptyset, \{x,z\}, \{y\}], \quad [\{y\}, \{x,y,z\}], \quad [\{x,z\}, \{y,z\}], \quad [\{x\}, \{z,x\}], \quad [\{x\}, \{y\}], \quad [\{x\}, \{y\}, \{z\}].$$

8. Determinare quali delle seguenti sono partizioni dell'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N} = \{0,1,2,...\}$:

$$[\{n \in \mathbf{N} \ : \ n > 5\}, \{n \in \mathbf{N} \ : \ n < 5\}], \quad [\{n \in \mathbf{N} \ : \ n > 5\}, \{0\}, \{1,2,3,4,5\}],$$

$$[\{n \in \mathbf{N} \ : \ n^2 > 11\}, \{n \in \mathbf{N} \ : \ n^2 < 11\}].$$

9. Sia A un insieme di n elementi. Per $i = 0,1,\ldots,n$, sia $P_i \subset \mathcal{P}(A)$ la collezione dei sottoinsiemi di A che possiedono esattamente i elementi.
   (a) Dimostrare che gli insiemi P_i formano una partizione di $\mathcal{P}(A)$.
   (b) Esibire una relazione di equivalenza su $\mathcal{P}(A)$ che induce la partizione della parte (a).

10. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire sull'insieme $\{a,b,c,d\}$?

11. Con $\mathcal{P}(A)$ indichiamo l'insieme delle parti di un insieme A. Sia $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.

12. L'insieme $\{2,4,6,9,12,18,27,36,48,60,72\}$ è ordinato mediante $d \leq d'$ quando d divide d'. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.

(a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
(b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
(c) Trovare i maggioranti di $\{2, 9\}$ e, se esiste, $\sup(\{2, 9\})$.
(d) Trovare i minoranti di $\{60, 72\}$ e, se esiste, $\inf(\{60, 72\})$.

13. Sia $X \subset \mathcal{P}\{1, 2, 3, 4\}$ dato da $X = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
    (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
    (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
    (c) Trovare i maggioranti di $\{\{2, \}, \{4\}\}$ e, se esiste, $\sup(\{2\}, \{4\})$.
    (d) Trovare i minoranti di $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ e, se esiste, $\inf(\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\})$.

14. Si consideri su $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ l'ordinamento lessicografico:
    $(m, n) \leq (p, q)$ se $m < p$, oppure se $m = p$ e $n \leq q$.
    (a) Dimostrare che è un ordinamento parziale.
    (b) Sia $A = \{(1, 2), (4, 5), (7, 7), (8, 9), (3, 4), (3, 6), (7, 2)\} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, con l'ordinamento indotto. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento su A. Determinare gli elementi massimali e minimali. Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.

15. Sia X un insieme e siano R_1 e R_2 due relazioni di equivalenza su X.
    (a) Dimostrare che $R_1 \cap R_2$ è una relazione di equivalenza.
    (b) Descrivere la partizione di X associata alla relazione $R_1 \cap R_2$ in termini di quelle associate a R_1 e R_2.
    (c) Esibire un esempio di R_1 e R_2 tali che $R_1 \cup R_2$ non è una relazione di equivalenza.