

1. Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

$$A = \emptyset, \quad B = \{\emptyset\}, \quad C = \{0\}.$$

2. Sia $X = \{1, 3, 4, 5\}$ e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X . Quali dei seguenti insiemi sono elementi di $\mathcal{P}(X)$?

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{\{1\}, 3\}, \quad C = \emptyset, \quad D = \{\emptyset\}, \quad E = \{\{1, 3\}, \{5\}\}, \quad F = \{1, 4\}.$$

3. Siano dati $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Determinare $A \times A$, $A \times B$ e $B \times A$. A chi appartengono gli elementi $(1, 2)$, $(1, x)$, $(z, 3)$?

4. Sia $A = \{x, y, z\}$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$A \cap (A \setminus A), \quad A \cup (A \cap A), \quad A \cup \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A \times A).$$

5. Sia data la funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x + 1$.

- (a) Determinare sottoinsiemi A e B di \mathbf{R} tali che $f: A \rightarrow B$ sia iniettiva ma non suriettiva.
 (b) Determinare sottoinsiemi C e D di \mathbf{R} tali che $f: C \rightarrow D$ sia suriettiva ma non iniettiva.
 (b) Determinare sottoinsiemi E e F di \mathbf{R} tali che $f: E \rightarrow F$ sia biiettiva.

6. Sia $A = \{1, 2, 5, 20, 50, 100\}$.

- (a) Disegnare il diagramma di Hasse di (A, \leq) , dove \leq è l'ordinamento standard.
 (b) Disegnare il diagramma di Hasse di $(A, |)$, dove $|$ è l'ordinamento dato dalla "divisibilità" (ossia mRn se $m|n$).

Che differenza c'è tra i due ordinamenti?

7. Sia $A = \{1, 2, 3\}$.

- (a) Quante relazioni simmetriche si possono definire su A ?
 (b) Quante relazioni riflessive e simmetriche si possono definire su A ?

8. Verificare che 5 divide $n^5 - n$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

9. Determinare tutti gli interi che soddisfano il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{11}. \end{cases}$$

Quanti ce ne sono nell'intervallo $[0, 200]$? Determinarli tutti.

10. Calcolare $\varphi(36)$, $\varphi(37)$, $\varphi(81)$, $\varphi(1024)$, dove φ indica la funzione di Eulero. Spiegare quali proprietà di φ avete usato.

11. Calcolare 81^{-1} in \mathbf{Z}_{250}^* .

12. Calcolare $111111^{33333333} \pmod{11}$ e $33333333^{33333333} \pmod{11}$. Giustificare bene ogni passaggio.

13. Sia Rossi un utente con chiavi pubbliche $N = 221$ ed $E = 7$.

- (a) Spedirgli il messaggio $m = 10$ dopo averlo criptato.

14. Preparare un kit RSA funzionante con chiavi pubbliche N ed E e chiave segreta D .