ESERCIZI DI TEORIA DI GALOIS - 1

---

[1] — Sia D un dominio (di integrità) unitario, e sia k un sottoanello (unitario) di D. Supponiamo che k sia un campo, così che D ha una struttura naturale di spazio vettoriale sul campo k. Dimostrare che, se D ha dimensione finita su k, allora anche D è a sua volta un campo, e come tale è estensione finita di k.

[2] — Sia $\{ p_n \,|\, n \in \mathbb{N}_+ \}$ l'insieme di tutti i numeri primi positivi in $\mathbb{Z}$, (indicizzati in qualche modo da $\mathbb{N}_+$: ad esempio, in ordine crescente avremmo $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ecc.). Dimostrare che:

(a) per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, l'estensione $\mathbb{Q}\big(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}\,\big)$ di $\mathbb{Q}$ è finita di grado 2^n.

(b) l'estensione $\mathbb{Q}\Big(\big\{ \sqrt{p_n} \,\big|\, n \in \mathbb{N}_+ \big\}\Big)$ di $\mathbb{Q}$ è algebrica infinita.

[3] — Sia E/k un'estensione di campi, e sia Γ un insieme di generatori per E/k, così che $E = k(\Gamma)$. Dimostrare che, se ogni $\gamma \in \Gamma$ è algebrico, allora E/k è estensione algebrica.

[4] — Sia $\Bbbk[x]$ l'anello dei polinomi nella variabile x a coefficienti nel campo $\Bbbk$.

Dimostrare che un polinomio $p(x) \in \Bbbk(x)$ genera l'anello $\Bbbk[x]$ *come estensione di* $\Bbbk$ — cioè $\Bbbk[x]$ è generato, come anello, da $\Bbbk \cup \{p(x)\}$ — se e soltanto se $p(x)$ è della forma

$$p(x) \;=\; a\,x + b \qquad \text{con } a, b \in \Bbbk \text{ tali che } a \neq 0 \,.$$

[5] — Sia $\mathbb{E} := \Bbbk(x)$ un'estensione semplice trascendente del campo $\Bbbk$.

Dimostrare che una funzione razionale $f(x) \in \Bbbk(x)$ genera il campo $\Bbbk(x)$ — come estensione di $\Bbbk$ — se e soltanto se $f(x)$ è della forma

$$f(x) \;=\; \frac{a\,x + b}{c\,x + d} \qquad \text{con } a, b, c, d \in \Bbbk \text{ tali che } \mathit{det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \,.$$

[6] — Data un'estensione di campi E/k, definiamo

$$\mathrm{Aut}\big(E/k\big) \;:=\; \Big\{ \sigma \in \mathcal{S}(E) \,\Big|\, \sigma \text{ è un automorfismo (di campo) di } E,\ \sigma\big|_k = \mathrm{id}_k \Big\} \;.$$

Dimostrare che $\mathrm{Aut}\big(E/k\big)$ è un sottogruppo del gruppo $\big(\mathcal{S}(E)\,;\circ\big)$ delle permutazioni di E (rispetto al prodotto di composizione).

[7] — Sia $k[x]$ l'anello dei polinomi nella variabile x a coefficienti nel campo k, e sia

$$\mathrm{Aut}\big(k[x]/k\big) \;:=\; \big\{\, \sigma \in \mathcal{S}\big(k[x]\big) \,\big|\, \sigma \text{ è un automorfismo (di anello) di } k[x],\ \sigma\big|_k = \mathrm{id}_k \,\big\} \quad .$$

Dimostrare che $\mathrm{Aut}\big(k[x]/k\big) \;\cong\; \mathrm{Aff}_k\big(k[x]\big)$ (come gruppi), dove

$$\mathrm{Aff}_k\big(k[x]\big) \;:=\; \big\{\, T_{a,b} \in \mathcal{S}\big(k[x]\big) \,\big|\, T_{a,b}\big(p(x)\big) = p(a\,x+b)\,,\ a \in k^* := k\setminus\{0\},\ b \in k \,\big\}\ .$$

[8] — Sia $k(x)$ un'estensione trascendente pura semplice del campo k.
Dimostrare che $\mathrm{Aut}\big(k(x)/k\big) \;\cong\; \mathbb{P}GL(2,k)$ (come gruppi), dove, se $k^* := k \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}GL(2,k) \;:=\; GL(2,k)\Big/k^*I_2 \quad .$$

[9] — Sia $k(x_1,\dots,x_n)$ un'estensione trascendente pura del campo k, con base di trascendenza $\big\{x_1,\dots,x_n\big\}$. Dimostrare che $\mathrm{Aut}\big(k(x_1,\dots,x_n)/k\big)$ contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{P}GL(n+1,k)$, dove, se $k^* := k \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}GL(n+1,k) \;:=\; GL(n+1,k)\Big/k^*I_{n+1} \quad .$$

[10] — Sia $\mathbb{C}(x)$ un'estensione trascendente pura semplice di $\mathbb{C}$, e sia

$$E \;:=\; \big(\mathbb{C}(x)\big)[y]\Big/\big(y^2 - x^3\big) \quad ,$$

estensione algebrica semplice di $\mathbb{C}(x)$. Dimostrare che:
(a) l'elemento $t := y\,x^{-1} \in E$ è trascendente su $\mathbb{C}$;
(b) $E = \mathbb{C}(t)$, per cui E è estensione trascendente *pura* semplice di $\mathbb{C}$.

[11] — Sia $F \subseteq E \subseteq L$ una torre di estensioni di campi. Siano $\{x_i\}_{i\in I}$ e $\big\{y_j\big\}_{j\in J}$ basi di trascendenza rispettivamente di E/F e di L/E. Dimostrare che:
(a) $\{x_i\}_{i\in I} \bigcup \big\{y_j\big\}_{j\in J}$ è una base di trascendenza di L/F;
(b) $tr.deg\Big(L/F\Big) \;=\; tr.deg\Big(L/E\Big) + tr.deg\Big(E/F\Big)$.

[12] — Sia $k \subseteq F \subseteq E$ una torre di estensioni di campi.
Dimostrare che se E/k è finitamente generata, alora anche F/k è finitamente generata.