MATEMATICA DISCRETA

CdL in Informatica

prof. Fabio GAVARINI

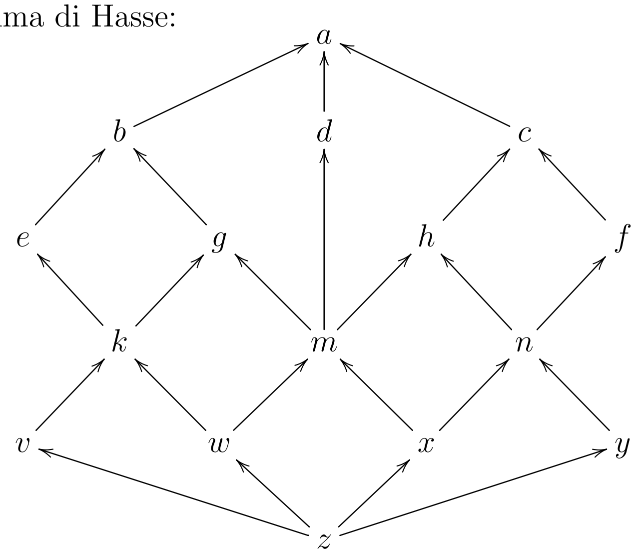
a.a. 2017–2018 — Esame scritto del 20 Giugno 2018 — Sessione Estiva, I appello

Testo & Svolgimento

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

· · · · · · · · · ⋆ · · · · · · · · ·

[1] Si consideri il reticolo $L := \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, v, w, x, y, z\}$ descritto dal seguente diagramma di Hasse:



(a) Determinare tutti gli atomi del reticolo $(L; \preceq)$.

(b) Determinare tutti gli elementi $\vee$–irriducibili del reticolo $(L; \preceq)$.

(c) Per ciascuno dei due elementi a, c e g in L, determinare se esista una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$–irriducibili per tale elemento. Nel caso in cui una tale $\vee$–fattorizzazione non esista, se ne spieghi il perché; nel caso in cui ne esista almeno una, si determinino *tutte* (a meno dell'ordine dei fattori) le $\vee$–fattorizzazioni di tal genere.

(d) Trovare un sottoreticolo L' del reticolo $(L; \preceq)$ tale che L' abbia esattamente sei elementi e sia distributivo.

(e) Stabilire se il reticolo $(L; \preceq)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

(f) Stabilire se il reticolo $(L; \preceq)$ sia distributivo oppure no.

[2] *(a)* Calcolare il resto nella divisione per 11 dei due numeri

$$A := 1111111^{44444444} \quad , \qquad B := 999999999^{333333333}$$

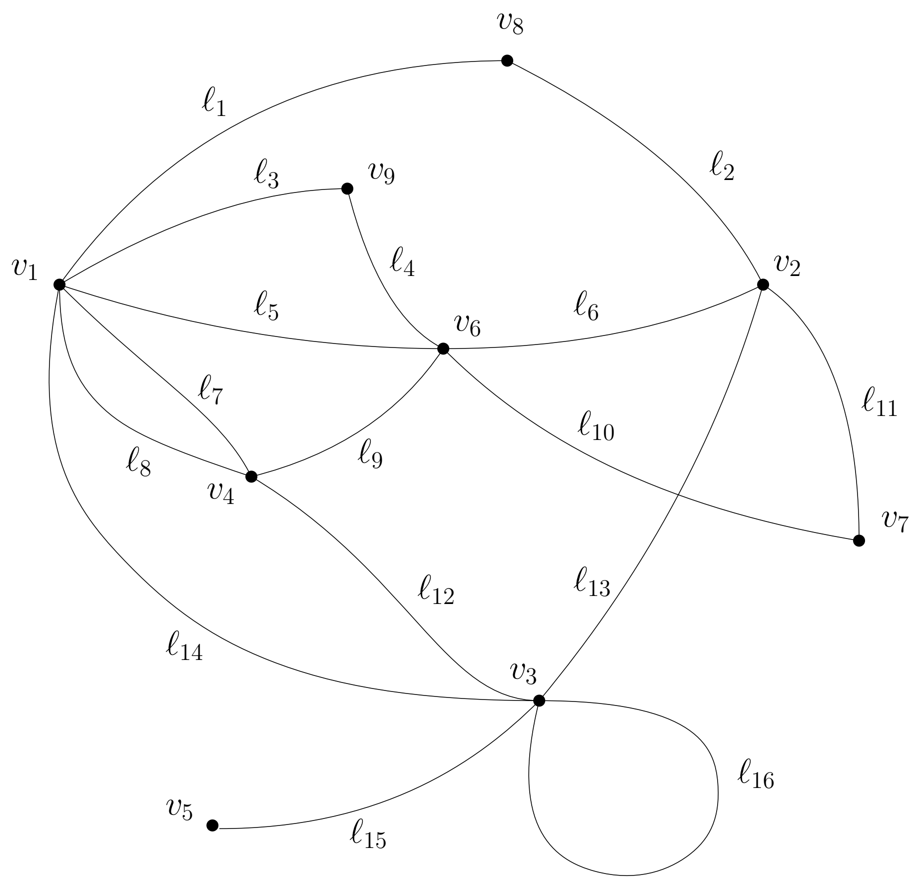
[3] *Utilizzando il Principio di Induzione*, si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $A_n := n^2 + 3n + 2$ è sempre pari.

[4] *(a)* Determinare se esista la classe $\overline{6}^{\,-1}$ inversa di $\overline{6}$ in $\mathbb{Z}_{30}$ e in $\mathbb{Z}_{31}$. In ciascun caso, se la risposta è positiva si calcoli esplicitamente la classe inversa $\overline{6}^{\,-1}$.

(b) Risolvere l'equazione modulare $\overline{96}\,\overline{x} = \overline{21}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{30}$.

(c) Risolvere l'equazione modulare $\overline{37}\,\overline{x} = \overline{29}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{31}$.

[5] Sia $\mathbf{G}$ il multigrafo così rappresentato:



(a) Determinare esplicitamente la matrice di adiacenza di $\mathbf{G}$.

(b) Determinare se $\mathbf{G}$ sia euleriano, semieuleriano oppure né l'uno né l'altro: in caso negativo si spieghi il perché, in caso affermativo si spieghi perché esistono cammini euleriani, e se ne determini esplicitamente uno.

(c) Determinare tutte le *foglie* e tutti i *ponti* di $\mathbf{G}$.

(d) Esistono *alberi ricoprenti* di $\mathbf{G}$? In caso negativo si spieghi il perché, in caso affermativo si determinino esplicitamente (se possibile) tre diversi alberi ricoprenti.

[6] Sia E un insieme, e siano η_1, η_2 due equivalenze in E.

(a) Dimostrare che la relazione $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ in E è una equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di equivalenza di $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ in funzione delle classi di equivalenza di η_1 e di η_2.

SVOLGIMENTO

N.B.: lo svolgimento qui presentato è molto lungo... Questo non significa *che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si approfitta per spiegare — in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con molti particolari tutti gli aspetti della teoria toccati più o meno a fondo dal testo in questione.*

[1] — *(a)* Ricordiamo che in un insieme ordinato in cui esista il minimo si dicono *atomi* gli elementi (se esistono) che coprono tale minimo. Nel caso in esame il reticolo $\big(L\,;\,\preceq\,\big)$ ha per minimo $\min_{\preceq}(L) = z$ e gli elementi che lo coprono — cioè appunto gli atomi di L — tutti e soli i seguenti: v , w , x e y .

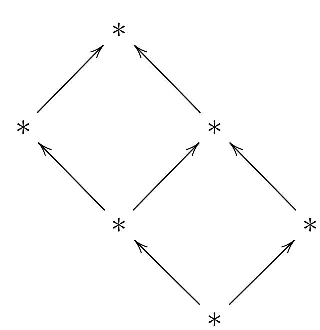
(b) Ricordiamo che in un reticolo un elemento q si dice $\vee$–*irriducibile* se in ogni sua $\vee$–fattorizzazione del tipo $q = r \vee s$ si ha necessariamente $r = q$ oppure $s = q$. Qualora il reticolo sia *finito* — come nel caso in esame — e quindi perfettamente descritto tramite il suo diagramma di Hasse, gli elementi $\vee$–irriducibili si riconoscono facilmente: sono quelli che coprono al più un solo elemento, dunque quelli che hanno al più una sola "zampa" che scende al disotto di essi; in particolare, il minimo e tutti gli atomi sono sempre $\vee$–irriducibili. Nel caso in esame, dall'analisi del diagramma di Hasse concludiamo subito che gli elementi $\vee$–irriducibili sono tutti e soli i seguenti: z (cioè il minimo), v , w , x , y (cioè gli atomi), e , f e d .

(c) Ricordiamo che in un reticolo *finito* — come è L — per ogni elemento esiste sempre (almeno) una $\vee$–fattorizzazione in elementi $\vee$–irriducibili, e quindi ne esiste anche (almeno) una che sia non ridondante. Nel caso del reticolo L in esame, per gli elementi a , c e g *tutte* le fattorizzazioni di questo tipo sono le seguenti:

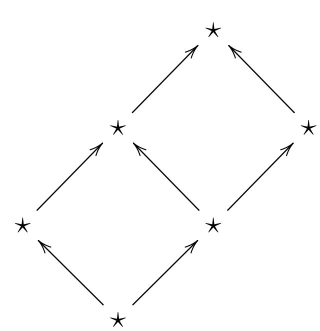
$$\begin{gathered} a \,=\, e \vee d \,=\, e \vee f \,=\, d \vee f \,=\, v \vee d \,=\, d \vee y \,=\, v \vee f \,=\, e \vee y \,= \\ =\, e \vee x \vee y \,=\, v \vee w \vee f \,=\, v \vee y \,=\, v \vee w \vee y \,=\, v \vee x \vee y \,=\, v \vee w \vee x \vee y \\ c \,=\, w \vee f \quad , \qquad\qquad g \,=\, v \vee w \vee x \,=\, v \vee x \end{gathered}$$

(d) Cercando un reticolo L' di L che abbia esattamente sei elementi e sia distributivo, l'esempio più semplice possibile (forse) si trova scegliendo un sottoinsieme *totalmente ordinato* di sei elementi: ad esempio, il sottoinsieme $L' := \{\, z \,, v \,, k \,, e \,, b \,, a \,\}$, oppure il sottoinsieme $L' := \{\, z \,, x \,, n \,, f \,, c \,, a \,\}$, ma ce ne sono molti altri (precisamente, tutte le catene ascendenti in L di sei elementi). Essendo un sottoinsieme totalmente ordinato, esso è automaticamente un sottoreticolo e (come tutti gli insiemi ordinati) è distributivo.

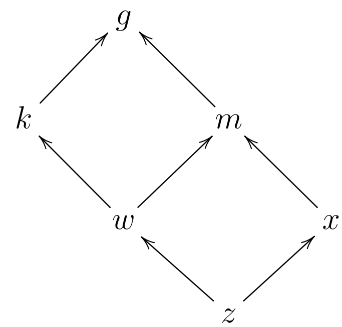
In alternativa, ogni "sotto-diagramma" del diagramma di Hasse di $\big(L\,;\,\preceq\,\big)$ di forma



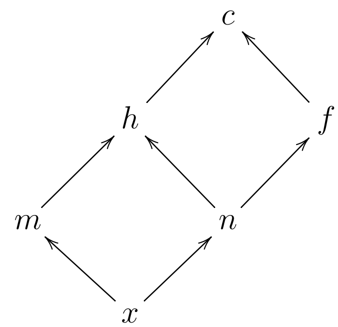
oppure



rappresenta un sottoreticolo L' di L che ha esattamente sei elementi ed è certamente distributivo. Ad esempio, due sottoreticoli di questo tipo sono

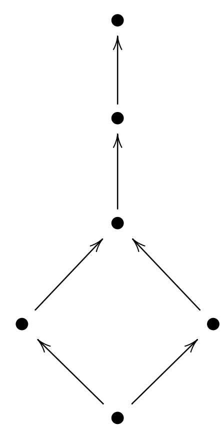


e

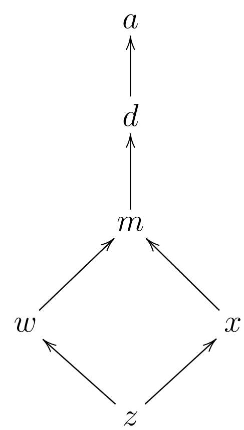


ma ci sono anche varie altre possibilità.

Un altro esempio ancora è dato dalla scelta di un sottoreticolo L' il cui diagramma di Hasse sia di forma



ad esempio



ma ci sono poi anche molti altri sottoreticoli di questa stessa forma, dunque tutti con sei elementi e distributivi.

(e) Il reticolo $\big(L\,;\,\preceq\big)$ certamente *non* è un'algebra di Boole, per varie ragioni, ciascuna sufficiente di per sé. Ne elenchiamo alcune:

(e.1) L non è un'algebra di Boole perché non è distributivo, come spiegato al punto *(f)* qui sotto.

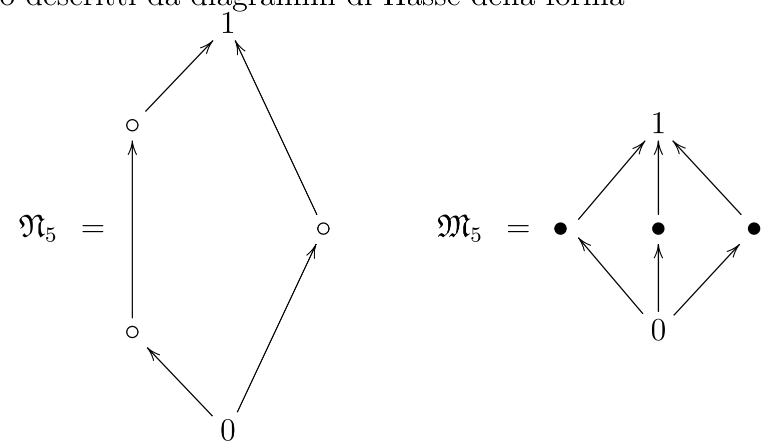
(e.2) L non è un'algebra di Boole perché alcuni elementi non hanno un complemento. Ad esempio, non esiste complemento per l'elemento w, nè per l'elemento x.

(e.3) L non è un'algebra di Boole perché alcuni elementi hanno più di un complemento. Ad esempio, k ha per complemento ciascuno degli elementi f, n e y, mentre f ha per complemento ciascuno degli elementi e, k e v; l'elemento y ha per complemento ciascuno dei sei elementi b, e, g, k, v e d, ed esistono poi ancora altri casi di elementi con più di un complemento...

(e.4) L non è un'algebra di Boole perché ha troppi elementi $\vee$–irriducibili. Infatti, in generale in un'algebra di Boole gli elementi $\vee$–irriducibili sono soltanto gli atomi più il minimo: invece in L ci sono — come si vede dallo svolgimento dei punti *(a)* e *(b)* — degli elementi $\vee$–irriducibili diversi dagli atomi e dal minimo, precisamente e, f e d.

(f) Come già spiegato al punto *(e.1)* qui sopra, il reticolo $\big(L\,;\,\preceq\big)$ *non è distributivo*,

perché ci sono in L dei sottoreticoli isomorfi al reticolo (non distributivo) $\mathfrak{N}_5$ e anche alcuni sottoreticoli isomorfi al reticolo (non distributivo) $\mathfrak{M}_5$. Ricordiamo infatti che tali reticoli sono descritti da diagrammi di Hasse della forma



e all'interno del reticolo L troviamo ad esempio che il sottoinsieme $L^\circ := \{ a , b , d , g , m \}$ è un sottoreticolo ismorfo a $\mathfrak{N}_5$, come anche — ad esempio — il sottoinsieme $L^\bullet := \{ a , b , d , c , m \}$ è un sottoreticolo isomorfo a $\mathfrak{M}_5$. Questo implica, per il *Criterio di Distributività dei Reticoli*, che certamente L non è distributivo.

In modo più diretto, possiamo osservare che L non è distributivo perché esistono elementi $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in L$ che non soddisfano uno o l'altra delle identità (che esprimono le proprietà distributive)

$$\ell_1 \wedge (\ell_2 \vee \ell_3) = (\ell_1 \wedge \ell_2) \vee (\ell_1 \wedge \ell_3) \quad , \qquad \ell_1 \vee (\ell_2 \wedge \ell_3) = (\ell_1 \vee \ell_2) \wedge (\ell_1 \vee \ell_3) \tag{1}$$

Infatti, nel caso $\ell_1 = b$, $\ell_2 = d$, $\ell_3 = g$ (che sono elementi di L°), abbiamo

$$b \wedge (d \vee g) = b \wedge a = b \neq g = m \vee g = (b \wedge d) \vee (b \wedge g)$$

dunque *non* vale l'identità di sinistra in (1); analogamente, $\ell_1 = h$, $\ell_2 = d$, $\ell_3 = c$, abbiamo

$$h \vee (d \wedge c) = h \vee m = h \neq c = a \wedge c = (h \vee d) \wedge (h \vee c)$$

quindi *non* vale l'identità di destra in (1). Con calcoli analoghi si trova che anche per i tre elementi $\ell_1 = b$, $\ell_2 = d$, $\ell_3 = c$ (che sono elementi di $L^\bullet$) *non* valgono le identità distributive in (1).

[2] — Osserviamo che calcolare il resto di N nella divisione per d significa trovare l'unico numero $r \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq r < d$ e $N = q\,d + r$ per un certo numero $q \in \mathbb{N}$ (che ora non ci interessa). Questo equivale a trovare l'unico numero $r \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq r < d$ e $N \equiv r \pmod{d}$, che scritto in un'altra forma significa trovare l'unico numero $r \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq r < d$ e $\overline{N} = \overline{r} \in \mathbb{Z}_d$. Procediamo allora a svolgere i calcoli necessari.

Per $N := A = 1111111^{44444444}$ abbiamo

$$\overline{A} = \overline{1111111^{44444444}} = \overline{1111111}^{\,44444444} = \overline{1}^{\,44444444} = \overline{1} \tag{2}$$

perché $1111111 = 11 \cdot 10^5 + 11 \cdot 10^3 + 11 \cdot 10 + 1 \equiv_{11} 1$, dunque $\overline{1111111} \equiv_{11} 1$ e quindi $\overline{1111111} = \overline{1} \in \mathbb{Z}_{11}$. Pertanto dalla (2) ricaviamo che *il resto cercato per* A *è* $r = 1$.

Per $N := B = 999999999^{333333333}$ abbiamo

$$\overline{B} \;=\; \overline{999999999^{333333333}} \;=\; \overline{999999999}^{\,44444444} \;=\; \overline{9}^{\,333333333} \tag{3}$$

perché $999999999 \;=\; 9 \cdot 111111111 \;=\; 9 \cdot \big(11 \cdot 10^7 + 11 \cdot 10^5 + 11 \cdot 10^3 + 11 \cdot 10 + 1\big) \equiv_{11} 9 \cdot 1 \equiv_{11} 9$, dunque $999999999 \equiv_{11} 9$ e quindi $\overline{999999999} = \overline{9} \in \mathbb{Z}_{11}$. Ora, per calcolare la potenza nel membro di destra della (3) osserviamo che il *Teorema di Eulero* ci garantisce che, siccome $\mathrm{M.C.D.}(9,11) = 1$, abbiamo $9^{\varphi(11)} \equiv_{11} 1$, cioè $\overline{9}^{\,\varphi(11)} = \overline{1} \in \mathbb{Z}_{11}$, dove $\varphi(11)$ è il valore della funzione di Eulero su 11. Poiché 11 è numero primo — o direttamente dalla definizione di φ — abbiamo $\varphi(11) = 11 - 1 = 10$. Allora, sfruttando il Teorema di Eulero, dalla (3) ricaviamo

$$\overline{9}^{\,333333333} \;=\; \overline{9}^{\,33333333\cdot 10+3} \;=\; \Big(\overline{9}^{\,10}\Big)^{333333333}\,\overline{9}^{\,3} \;=\; \big(\overline{1}\,\big)^{333333333}\,\overline{9}^{\,3} \;=\; \overline{1}\cdot\overline{9}^{\,3} \;=\; \overline{9}^{\,3}$$

da cui poi il calcolo diretto ci dà

$$\overline{9}^{\,3} \;=\; \overline{11-2}^{\,3} \;=\; \overline{-2}^{\,3} \;=\; \overline{(-2)^3} \;=\; \overline{-(2^3)} \;=\; \overline{-8} \;=\; \overline{11-8} \;=\; \overline{3}$$

oppure, seguendo un'altra strada,

$$\overline{9}^{\,3} \;=\; \overline{9}^{\,2+1} \;=\; \overline{9}^{\,2}\cdot\overline{9}^{\,1} \;=\; \overline{9^2}\cdot\overline{9}^{\,1} \;=\; \overline{81}\cdot\overline{9} \;=\; \overline{4}\cdot\overline{9} \;=\; \overline{4\cdot 9} \;=\; \overline{36} \;=\; \overline{3\cdot 11+3} \;=\; \overline{3}$$

In ogni caso, da questi calcoli ricaviamo che *il resto cercato per B è $r = 3$*.

[3] — Dovendo dimostrare che $A_n := n^2 + 3\,n + 2$ è pari, per ogni $n \in \mathbb{N}$, utilizzando il principio di induzione, adottiamo quello in forma debole, nei due passi *Base dell'Induzione* e *Passo Induttivo*.

Base dell'Induzione: dobbiamo dimostrare che la tesi è vera per $n = 0$, cioè che A_0 *è pari*. Ora, per definizione abbiamo $A_0 := 0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2$, che è pari, q.e.d.

Passo Induttivo: dobbiamo dimostrare che, dato un $k\,(\in \mathbb{N})$ qualsiasi, *SE* è vera la tesi per k, *ALLORA* è vera la tesi anche per $k+1$. Dunque abbiamo (=*Ipotesi induttiva*)

$$\textit{Hp Ind:} \qquad A_k \text{ è pari, cioè } \exists\, N_k \in \mathbb{Z} \,:\, A_k = 2\,N_k \tag{4}$$

e dobbiamo dimostrare (=*Tesi Induttiva*) che

$$\textit{Th Ind:} \qquad A_{k+1} \text{ è pari, cioè } \exists\, N_{k+1} \in \mathbb{Z} \,:\, A_k = 2\,N_{k+1} \tag{5}$$

Per ottenere dunque la (5) dalla (4), sviluppiamo esplicitamente A_{k+1} e poi lo riscriviamo in termini di A_k, come segue:

$$\begin{aligned} A_{k+1} \;:=\; & (k+1)^2 + 3\,(k+1) + 2 \;=\; k^2 + 2\,k + 1 + 3\,k + 3 + 2 \;= \\ =\; & k^2 + 3\,k + 2 + 2\,k + 1 + 3 \;=\; \big(k^2 + 3\,k + 2\big) + 2\,k + (1+3) \;= \\ & \qquad =\; A_k + 2\,k + 4 \overset{(*)}{=} 2\,N_k + 2\,(k+2) \;=\; 2\,(N_k + k + 2) \;=\; 2\,N_{k+1} \end{aligned}$$

dove $N_{k+1} := N_k + k + 2$ e nel passaggio indicato con "$\overset{(*)}{=}$" abbiamo sfruttato l'ipotesi induttiva (4) che dice proprio che $A_k = 2\,N_k$. Così la (5) è dimostrata, q.e.d.

[4] — *(a)* In generale, ricordiamo che nell'anello $\mathbb{Z}_n$ degli interi modulo n per una specifica classe $\overline{a} := [a]_n$ esiste la classe inversa $\overline{a}^{\,-1} := [a]_n^{-1}$ se e soltanto se $\text{M.C.D.}(a,n) = 1$. Infatti, questo segue dal fatto che $\overline{a}^{\,-1}$, se esiste, è l'unica soluzione dell'equazione modulare $\overline{a}\,\overline{x} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_n$: quest'ultima è equivalente all'equazione congruenziale (in $\mathbb{Z}$) $a\,x \equiv 1 \pmod{n}$, che a sua volta ammette soluzioni se e soltanto se $\text{M.C.D.}(a,n) \,\Big|\, 1$, dunque se e soltanto se $\text{M.C.D.}(a,n) = 1$.

Applicando quanto appena ricordato al caso $a := 6$ e $n := 30$ otteniamo che $\text{M.C.D.}(6,30) = 6 \neq 1$, e quindi concludiamo che *non esiste in* $\mathbb{Z}_{30}$ *la classe* $\overline{6}^{\,-1} = [6]_{30}^{-1}$ *inversa della classe* $\overline{6} = [6]_{30}$ *in* $\mathbb{Z}_{30}$.

Applicando lo stesso criterio per $a := 6$ e $n := 31$ osserviamo che $\text{M.C.D.}(6,31) = 1$, e dunque *esiste in* $\mathbb{Z}_{30}$ *la classe* $\overline{6}^{\,-1} = [6]_{31}^{-1}$ *inversa della classe* $\overline{6} = [6]_{31}$ *in* $\mathbb{Z}_{31}$.

A questo punto per calcolare effettivamente la classe $[6]_{31}^{-1}$ procediamo così: l'algoritmo euclideo delle divisioni successive ci dà

$$\begin{aligned} 31 &= 6 \cdot 5 + 1 \\ 6 &= 1 \cdot 6 + 0 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo l'identità di Bézout $31 \cdot 1 + 6 \cdot (-5) = 1$, che a sua volta ci dà $\overline{6} \cdot \overline{(-5)} = \overline{1}$, per cui la classe inversa cercata è $\overline{6}^{\,-1} = \overline{(-5)} = -\overline{5} = \overline{26}$ in $\mathbb{Z}_{31}$.

(b) Per risolvere l'equazione modulare $\overline{96}\,\overline{x} = \overline{21}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{30}$ cominciamo riducendo modulo 30 i numeri che compaiono in tale equazione, o comunque sostituendoli con numeri ad essi congruenti (modulo 30) che siano però più "semplici", in modo da semplificare i calcoli. Operativamente, abbiamo $\overline{96} = \overline{6}$ e $\overline{21} = \overline{-9} = -\overline{9}$, perciò l'equazione modulare di partenza si può riscrivere nella forma

$$\overline{6}\,\overline{x} = -\overline{9} \qquad \text{in} \quad \mathbb{Z}_{30}$$

Ma risolvere tale equazione equivale a risolvere l'equazione congruenziale (in $\mathbb{Z}$)

$$6\,x \equiv -9 \qquad \big(\text{mod } 30\big)$$

la quale *non* ammette soluzioni, perché si ha $6 = \text{M.C.D.}(6,30) \not\big| \, (-9)$, cioè il M.C.D. tra il coefficiente dell'incognita e il modulo *non* divide il termine noto. Concludiamo allora che *l'equazione modulare di partenza non ammette soluzioni.*

(c) Per risolvere l'equazione modulare $\overline{37}\,\overline{x} = \overline{29}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{31}$ cominciamo riducendo modulo 31 i numeri che compaiono in tale equazione, o comunque sostituendoli con numeri ad essi congruenti (modulo 31) che siano però più "semplici", in modo da semplificare i calcoli. Operativamente, abbiamo $\overline{37} = \overline{6}$ e $\overline{29} = \overline{-2} = -\overline{2}$, perciò l'equazione modulare di partenza si può riscrivere nella forma

$$\overline{6}\,\overline{x} = -\overline{2} \qquad \text{in} \quad \mathbb{Z}_{31} \tag{6}$$

Ora, risolvere tale equazione equivale a risolvere l'equazione congruenziale (in $\mathbb{Z}$)

$$6\,x \equiv -2 \qquad \big(\text{mod } 31\big)$$

la quale ammette soluzioni, perché si ha $1 = \text{M.C.D.}(6,31) \not| \, (-2)$, cioè il M.C.D. tra il coefficiente dell'incognita e il modulo divide il termine noto. Concludiamo allora che *l'equazione modulare di partenza non ammette soluzioni*. A questo punto, la soluzione — unica! — di (6) può essere calcolata così

$$\overline{6}\,\overline{x} \;=\; -\overline{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{6}\,\overline{x} \;=\; \overline{6}^{\,-1}\big(-\overline{2}\big) \;=\; \big(-\overline{5}\big)\big(-\overline{2}\big) \;=\; \overline{10}$$

sfruttando quanto già visto al punto *(a)*, per cui $\overline{x} = \overline{10}$ è l'unica soluzione dell'equazione modulare di partenza.

In alternativa, un possibile metodo che consente calcoli elementari (ma richiede un po' di astuzia) può essere il seguente: dato che $-\overline{2} = \overline{2 \cdot 31 - 2} = \overline{62 - 2} = \overline{60} = \overline{6} \cdot \overline{10}$, la (6) si riscrive come

$$\overline{6}\,\overline{x} \;=\; \overline{6} \cdot \overline{10}$$

la quale ovviamente ha soluzione $\overline{x} = \overline{10}$; inoltre, poiché $\text{M.C.D.}(6,31) = 1$, sappiamo anche che questa è *l'unica* soluzione esistente in $\mathbb{Z}_{31}$.

[5] — *(a)* Ricordiamo che la matrice di adiacenza $A_{\mathbf{G}} = \big(a_{ij}\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;}$ di un multigrafo **G** con n vertici ha come coefficienti i numeri

$$a_{ij} := (1+\delta_{ij}) \cdot (\textit{numero di spigoli tra il vertice i-esimo e il vertice j-esimo})$$

Perciò dall'analisi diretta del multigrafo in esame troviamo che la matrice richiesta è

$$A_{\mathbf{G}} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Ricordiamo che un multigrafo si dice euleriano, risp. semieuleriano, se possiede un cammino euleriano chiuso, risp. un cammino euleriano aperto, laddove si dice *cammino euleriano* un cammino che percorra esattamente una e una sola volta ogni spigolo del multigrafo. Inoltre, un criterio per stabilire se un multigrafo sia euleriano, semieuleriano, o nessuno dei due, formulato esclusivamente in termini del *grado* di ciascun vertice, è il seguente:

(E) — *Un multigrafo è euleriano se e soltanto se per ogni suo vertice il grado è pari.*

(SE) — *Un multigrafo è semieuleriano se e soltanto se esistono esattamente due vertici, siano v_+ e $v_\times$, con grado dispari mentre ogni altro vertice ha grado pari; in questo caso, ogni possibile cammino euleriano nel multigrafo ha per estremi i vertici con grado dispari v_+ e $v_\times$.*

Ricordiamo che il *grado* di un vertice v è, per definizione, il numero di semi-spigoli che si appoggiano in v. Dall'analisi diretta allora troviamo che nel caso del multigrafo $\mathbf{G}$ in esame i gradi $d(v_i)$ dei vari vertici v_i sono

$$d(v_1) = 6 \quad , \quad d(v_2) = 4 \quad , \quad d(v_3) = 6 \quad , \quad d(v_4) = 4 \quad , \quad d(v_5) = 1$$
$$d(v_6) = 5 \quad , \quad d(v_7) = 2 \quad , \quad d(v_8) = 2 \quad , \quad d(v_9) = 2$$

Dunque abbiamo *esattamente due vertici* $v_+ := v_5$ e $v_\times := v_6$ *con grado dispari*, mentre tutti gli altri hanno grado pari. Pertanto, per il criterio (SE) su ricordato concludiamo che *il multigrafo* $\mathbf{G}$ *è semieuleriano, e in esso ogni cammino euleriano ha per estremi i vertici* $v_+ := v_5$ *e* $v_\times := v_6$.

Un possibile cammino euleriano (orientato da $v_+ := v_5$ a $v_\times := v_6$) è dato dalla seguente successione di vertici e spigoli:

$$v_+ := v_5 \prec \ell_{15} \succ v_3 \prec \ell_{16} \succ v_3 \prec \ell_{13} \succ v_2 \prec \ell_{11} \succ v_7 \prec \ell_{10} \succ v_6 \prec \ell_6 \succ v_2 \cdots$$
$$\cdots v_2 \prec \ell_2 \succ v_8 \prec \ell_1 \succ v_1 \prec \ell_3 \succ v_9 \prec \ell_4 \succ v_6 \prec \ell_5 \succ v_1 \prec \ell_7 \succ v_4 \cdots$$
$$\cdots v_4 \prec \ell_8 \succ v_1 \prec \ell_{14} \succ v_3 \prec \ell_{12} \succ v_4 \prec \ell_9 \succ v_6 =: v_\times$$

Un altro possibile cammino (orientato da $v_\times := v_6$ a $v_+ := v_5$), tra i tanti, è dato da

$$v_\times := v_6 \prec \ell_{10} \succ v_7 \prec \ell_{11} \succ v_2 \prec \ell_6 \succ v_6 \prec \ell_4 \succ v_9 \prec \ell_3 \succ v_1 \prec \ell_{14} \succ v_3 \cdots$$
$$\cdots v_3 \prec \ell_{16} \succ v_3 \prec \ell_{13} \succ v_2 \prec \ell_2 \succ v_8 \prec \ell_1 \succ v_1 \prec \ell_7 \succ v_4 \prec \ell_9 \succ v_6 \cdots$$
$$\cdots v_6 \prec \ell_5 \succ v_1 \prec \ell_8 \succ v_4 \prec \ell_{12} \succ v_3 \prec \ell_{15} \succ v_5 =: v_+$$

(c) Ricordiamo che una *foglia* di un multigrafo è un vertice che ha grado minore di 2: dall'analisi diretta vediamo allora che nel multigrafo $\mathbf{G}$ esiste esattamente una sola foglia, che è il vertice v_5 .

Ricordiamo che un *ponte* di un multigrafo è uno spigoli tale che, cancellandolo, la componente connessa che lo contiene si spezzi in due componenti connesse distinte; ad esempio, se c'è nel multigrafo una foglia di grado 1, allora l'unico spigolo che si appoggia a quella data foglia è certamente un ponte. Nel caso del multigrafo $\mathbf{G}$ in esame dall'analisi diretta vediamo che esiste esattamente un solo ponte, che è proprio quell'unico spigolo ℓ_{15} che si appoggia all'unica foglia (di grado 1) v_5 presente in $\mathbf{G}$.

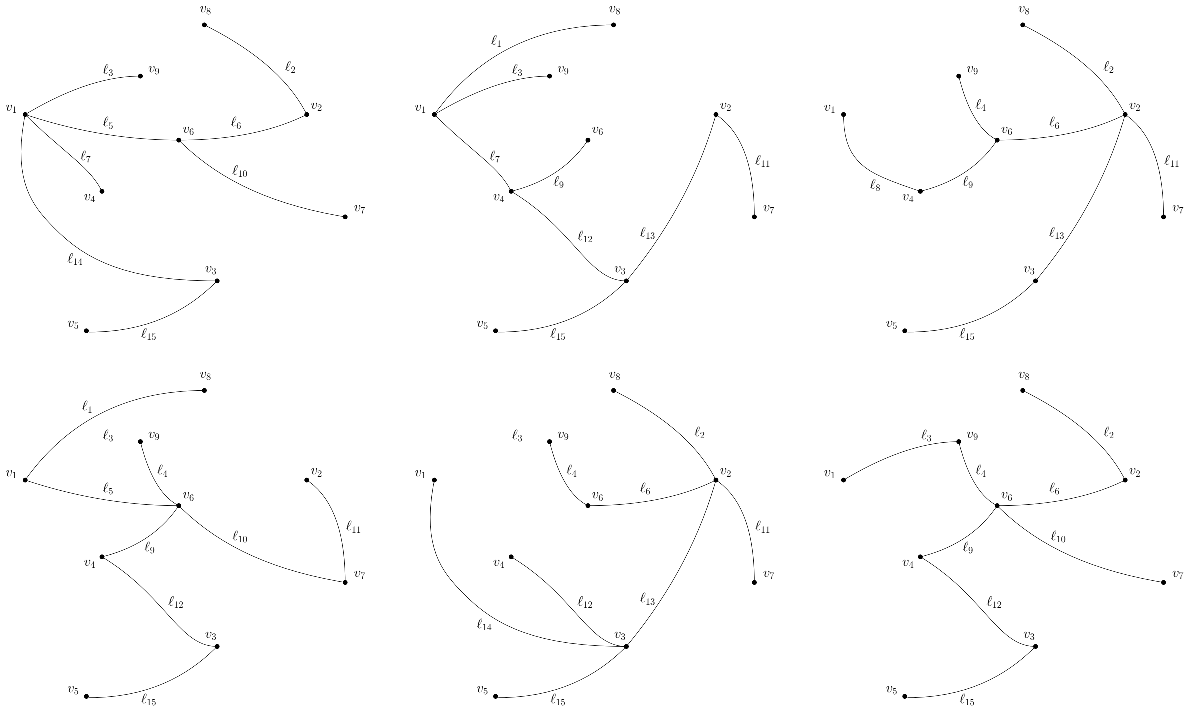
(d) Il multigrafo $\mathbf{G}$ è chiaramente *connesso*, perciò sicuramente esistono alberi ricoprenti di $\overline{\mathbf{G}}$. In particolare, tra i tanti possibili presentiamo i sei seguenti:

[6] — *(a)* Ricordiamo che una relazione ρ si dice *(di) equivalenza* se è *riflessiva*, *transitiva* e *simmetrica*. Proviamo allora che, per ciascuna di queste tre proprietà, se η_1 e η_2 la soddisfa allora ciò è vero anche per $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$. Ricordiamo anche che la relazione $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ è descritta da $a \, \eta \, b \iff (a \, \eta_1 \, b) \wedge (a \, \eta_2 \, b)$.

(a.1) Riflessività: Per ogni $y \in E$ si ha $y \, \eta_1 \, y$ (perché η_1 è riflessiva!) e $y \, \eta_2 \, y$ (perché η_2 è riflessiva!), e quindi anche $y \, \eta \, y$, q.e.d.

(a.2) Transitività: Per ogni $x, y, z \in E$ tali che $x \, \eta \, y$ e $y \, \eta \, z$, vogliamo dimostrare che $x \, \eta \, z$. Ora,

$$(x \, \eta \, y) \wedge (y \, \eta \, z) \implies (x \, \eta_i \, y) \wedge (y \, \eta_i \, z) \implies (x \, \eta_i \, z) \qquad \forall \;\, i \in \{1, 2\}$$



perché $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ e perché η_i è transitiva, per ogni $i \in \{1,2\}$. Dunque abbiamo $(x\,\eta_1\,z) \wedge (x\,\eta_2\,z)$, cioè proprio $x\,\eta\,z$, q.e.d.

(a.3) Simmetria: Per ogni $x, y \in E$ tali che $x\,\eta\,y$, vogliamo provare che $y\,\eta\,x$. Ma

$$(x\,\eta\,y) \implies (x\,\eta_i\,y) \implies (y\,\eta_i\,x) \qquad\qquad \forall\ i \in \{1,2\}$$

perché $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ e perché η_i è simmetrica, per ogni $i \in \{1,2\}$; quindi abbiamo $(y\,\eta_1\,x) \wedge (y\,\eta_2\,x)$, cioè proprio $y\,\eta\,x$, q.e.d.

(b) Per ogni $e \in E$, vogliamo descrivere la classe di η–equivalenza di e, che per definizione è il sottoinsieme di E dato da

$$[e]_\eta := \big\{\, e' \in E \;\big|\; e'\eta\, e \,\big\}$$

Analogamente, le classi di η_i–equivalenza ($i = 1,2$) di e sono date da

$$[e]_{\eta_1} := \big\{\, e' \in E \;\big|\; e'\eta_1\, e \,\big\} \quad , \qquad [e]_{\eta_2} := \big\{\, e' \in E \;\big|\; e'\eta_2\, e \,\big\}$$

A questo punto, il calcolo diretto ci dà

$$\begin{aligned} [e]_\eta := \big\{\, e' \in E \;\big|\; e'\eta\, e \,\big\} &= \big\{\, e' \in E \;\big|\; \big(e'\eta_1\, e\big) \wedge \big(e'\eta_2\, e\big) \,\big\} = \\ &= \big\{\, e' \in E \;\big|\; e'\eta_1\, e \,\big\} \bigcap \big\{\, e' \in E \;\big|\; e'\eta_2\, e \,\big\} = [e]_{\eta_1} \bigcap [e]_{\eta_2} \end{aligned}$$

dunque $[e]_\eta = [e]_{\eta_1} \bigcap [e]_{\eta_2}$, che è proprio una descrizione del tipo richiesto. In parole, *ogni classe di equivalenza (di un elemento e in E) per $\eta := \eta_1 \cap \eta_2$ è nient'altro che l'intersezione delle classi di equivalenza (dello stesso elemento!) per η_1 e per η_2.*