

MATEMATICA DISCRETA

CdL in Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2017–2018 — Esame scritto del 4 Settembre 2018 — Sessione Autunnale, I appello
Testo & Svolgimento

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... ★

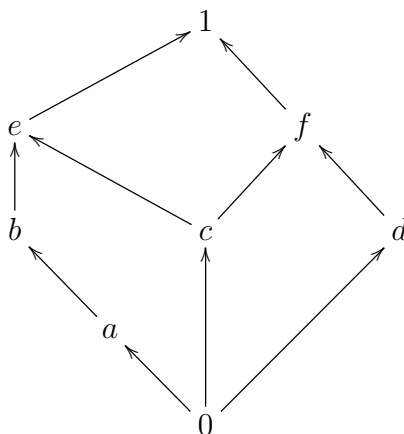
[1] Siano $N, S \in \mathbb{N}$ i due numeri che in notazione posizionale sono espressi da

$N := (13202)_{\text{QUATTRO}}$ in base QUATTRO, $S := (630)_{\text{DIECI}}$ in base DIECI,

utilizzando le quattro cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3 per la notazione in base QUATTRO e le dieci cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 per quella in base DIECI.

- (a) Scrivere N in base DIECI.
- (b) Scrivere N in base OTTO, usando le otto cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- (c) Scrivere N in base DUE, usando le due cifre (ordinate) 0, 1.
- (d) Calcolare $N + S$, scrivendolo sia in base QUATTRO che in base DIECI.

[2] Si consideri il reticolo $L := \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ descritto dal seguente diagramma di Hasse:



- (a) Determinare tutti gli atomi del reticolo L .
- (b) Determinare tutti gli elementi \vee -irriducibili del reticolo L .
- (c) Determinare se esista una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili per l'elemento 1. Nel caso in cui una tale \vee -fattorizzazione non esista, se ne spieghi il perché; nel caso in cui esista, se ne determini esplicitamente almeno una, e — se fosse possibile — almeno due non equivalenti.
- (d) Determinare se il reticolo L sia un'algebra di Boole oppure no.
- (e) Determinare se il reticolo L sia complementato oppure no.
- (f) Determinare se il reticolo L sia distributivo oppure no.

[3] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

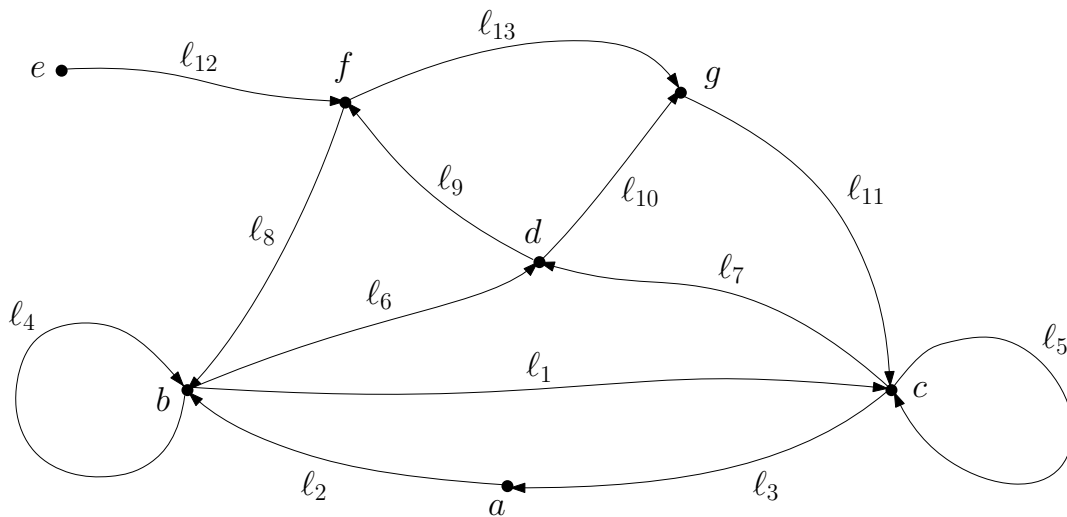
$$\circledast : \begin{cases} 123x \equiv -51 \pmod{8} \\ 276x \equiv -98 \pmod{10} \\ -79x \equiv 111 \pmod{7} \end{cases}$$

[4] Nell'insieme \mathbb{N}_+ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione σ definita da

$$h \sigma k \iff \exists n \in \mathbb{N}_+ : h \cdot k = n^2 \quad \text{per ogni } h, k \in \mathbb{N}_+$$

- (a) Dimostrare che σ è una relazione d'equivalenza in \mathbb{N}_+ .
 (b) Descrivere esplicitamente la classe di σ -equivalenza di 1.

[5] Si consideri il multidigrafo \vec{G} così rappresentato:



e si indichi con \overline{G} il multigrafo associato a \vec{G} .

(a) Determinare esplicitamente la matrice di adiacenza di \vec{G} , ordinando i vertici nel modo standard, cioè a, b, c, d, e, f, g .

(b) Calcolare il numero di cammini (orientati) in \vec{G} di lunghezza 2 dal vertice b al vertice d , dal vertice f al vertice g , e dal vertice g al vertice a . In ciascun caso, se tale numero è maggiore di zero si determini un cammino esplicito del tipo considerato.

(c) Determinare se il multidigrafo \vec{G} sia euleriano, oppure semieuleriano, oppure né l'uno né l'altro. Nell'ultimo caso, si spieghi perché non sia né l'uno né l'altro; in ciascuno dei primi due casi, si determini esplicitamente almeno un cammino euleriano.

(d) Determinare tutte le eventuali foglie e tutti gli eventuali ponti del multigrafo \overline{G} .

(e) Determinare la matrice di adiacenza del multigrafo \overline{G} .

SVOLGIMENTO

N.B.: lo svolgimento qui presentato è molto lungo... Questo non significa che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si approfitta per spiegare — in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con molti particolari tutti gli aspetti della teoria toccati più o meno a fondo dal testo in questione.

— ★ —

[1] — (a) Scrivendo i calcoli direttamente in base DIECI, dalle definizioni abbiamo

$$\begin{aligned} N &:= (13202)_{\text{QUATTRO}} = 1 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = \\ &= 1 \cdot 256 + 3 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 256 + 192 + 32 + 0 + 2 = (482)_{\text{DIECI}} \end{aligned}$$

dunque in conclusione abbiamo $N = (482)_{\text{DIECI}}$.

(c) Procediamo prima a risolvere il punto (c), ché il risultato ci è poi utile per risolvere anche il punto (b) — che comunque può essere svolto e risolto autonomamente, comunque.

Affrontiamo e risolviamo il quesito con due metodi diversi.

1° metodo: Per la base QUATTRO =: 4 abbiamo $4 = 2^2$. Pertanto, ogni cifra in base 4 si scrive come numero di (al più) DUE cifre in base 2, precisamente

$$(0)_4 = (00)_2 \quad , \quad (1)_4 = (01)_2 \quad , \quad (2)_4 = (10)_2 \quad , \quad (3)_4 = (11)_2 \quad (1)$$

Come conseguenza, data la scrittura $N := (13202)_4$ di N in base 4, sviluppando ogni sua cifra come coppia di cifre in base 2 secondo la (1) otteniamo $N := (01.11.10.00.10)_2$ — dove abbiamo messo dei punti in basso per marcare la suddivisione in coppie di cifre (in base 2) provenienti da singole cifre in base 4. Da questa espressione, scartando i suddetti punti e lo 0 iniziale, *otteniamo la scrittura di N in base 2, che è $N := (111100010)_2$.*

Si noti che il procedimento seguito si spiega al modo seguente. Sviluppando esplicitamente la formula sintetizzata dalla scrittura posizionale in base 4 per N , e poi riscrivendola con la notazione in base 2, abbiamo

$$\begin{aligned} N &:= (13202)_4 = 1 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = \\ &= (1)_2 \cdot (100)_2^4 + (11)_2 \cdot (100)_2^3 + (10)_2 \cdot (100)_2^2 + (0)_2 \cdot (100)_2^1 + (10)_2 \cdot (100)_2^0 = \\ &= (1)_2 \cdot (100000000)_2 + (11)_2 \cdot (1000000)_2 + (10)_2 \cdot (10000)_2 + (0)_2 \cdot (100)_2 + (10)_2 \cdot (1)_2 = \\ &= (100000000)_2 + (11000000)_2 + (100000)_2 + (0)_2 + (10)_2 = (111100010)_2 \end{aligned}$$

2° metodo: Procedendo con l'algoritmo standard, i calcoli espliciti ci danno — scrivendo i calcoli in base DIECI, per i quali usiamo la scrittura di N in base $D := \text{DIECI}$ calcolata al punto (a) — tramite divisioni successive per 2, le seguenti identità:

$$\begin{aligned} N &:= (482)_{\text{DIECI}} = 2 \cdot 241 + 0 \\ 241 &= 2 \cdot 120 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\
60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\
30 &= 2 \cdot 15 + 0 \\
15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\
7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}$$

da cui leggiamo, nella colonna dei resti, dal basso verso l'alto, tutte le cifre (dalla più alta alla più bassa) che entrano nella scrittura posizionale di N in base 2: in altre parole, queste formule danno $N = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. In conclusione, la scrittura di N in base DUE è $N = (111100010)_2$, come già trovato col primo metodo.

(b) Come prima, procediamo con due metodi diversi.

1° metodo: Siccome $8 = 2^3$, a partire dalla scrittura di N in base 2 ottenuta in (c) possiamo facilmente ricavare la scrittura di N stesso in base 8. Infatti, da $N = (111100010)_2$ come visto in (c) otteniamo

$$\begin{aligned}
N &:= (111100010)_2 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \\
&= (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^6 + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^3 + (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^0 = \\
&= (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 8^2 + (1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 8^1 + (0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 8^0 = \\
&= (7)_8 \cdot (10)_8^2 + (4)_8 \cdot (10)_8^1 + (2)_8 \cdot (10)_8^0 = (700)_8 + (40)_8 + (2)_8 = (742)_8
\end{aligned}$$

In sintesi, quel che succede è che, siccome $8 = 2^3$, nella scrittura di N in base 8 possiamo accorpate le cifre (da destra verso sinistra) a gruppi di tre, riscrivere tali numeri (che in base 2 sono di tre cifre) in base 8, in cui sono espressi da *singole cifre*, e la stringa che otteniamo è automaticamente la scrittura posizionale di N in base $2^3 = 8$. Dunque i passaggi precedenti si sintetizzano in

$$N := (111100010)_2 = (111.100.010)_2 = (742)_8$$

dove i punti in basso separano i vari gruppi di tre cifre e usiamo le formule di conversione

$$(111)_2 = (7)_8 \quad , \quad (100)_2 = (4)_8 \quad , \quad (010)_2 = (2)_8 \quad .$$

2° metodo: Utilizzando l'algoritmo standard, i calcoli espliciti ci danno — scrivendo i calcoli in base DIECI, per i quali usiamo la scrittura posizionale di N in base $D := \text{DIECI}$ ottenuta al punto (a) — tramite divisioni successive per 2, le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
N &:= (482)_{\text{DIECI}} = 8 \cdot 60 + 2 \\
60 &= 8 \cdot 7 + 4 \\
7 &= 8 \cdot 0 + 7
\end{aligned}$$

da cui leggiamo (nella colonna dei resti, dal basso verso l'alto) tutte le cifre della scrittura posizionale di N in base 4: in altre parole, queste formule danno $N = 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0$. Concludendo, la scrittura posizionale di N in base OTTO è $N = (742)_8$, come già avevamo ottenuto col primo metodo.

(d) Per calcolare $N + S$ scritto in base $D := \text{DIECI}$ utilizziamo l'espressione di N in base DIECI ottenuta in (a), e così troviamo

$$\left(\begin{array}{r} 11 \\ N = 482 + \\ S := 630 = \\ \hline 1112 \end{array} \right)_{\text{DIECI}}$$

cioè $N + S = (1112)_{\text{DIECI}}$.

Per calcolare $N + S$ scritto in base $4 := \text{QUATTRO}$ invece dobbiamo prima ottenere l'espressione in base 4 di S stesso. Direttamente dalle definizioni abbiamo (scrivendo i calcoli in base DIECI)

$$\begin{aligned} S &:= (630)_{\text{DIECI}} = 4 \cdot 157 + 2 \\ 157 &= 4 \cdot 39 + 1 \\ 39 &= 4 \cdot 9 + 3 \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 4 \cdot 0 + 2 \end{aligned}$$

da cui “leggiamo” la scrittura posizionale $S = (21312)_4$. A questo punto possiamo calcolare la somma $N + S$ facendo i conti con la notazione in base QUATTRO, il che ci dà di N in base DIECI ottenuta in (a), e così troviamo

$$\left(\begin{array}{r} 1111 \\ N = 13202 + \\ S := 21312 = \\ \hline 101120 \end{array} \right)_{\text{QUATTRO}}$$

dunque in conclusione $N + S = (101120)_{\text{QUATTRO}}$.

Come *controprova* — sebbene non sia necessario — andiamo a verificare che cambiando base (da DIECI a QUATTRO e viceversa) si passa effettivamente da una espressione all'altra. In un verso, partendo dall'espressione $N + S = (1112)_{\text{DIECI}}$ in base DIECI i calcoli espliciti ci danno

$$\begin{aligned} N + S &:= (1112)_{\text{DIECI}} = 4 \cdot 278 + 0 \\ 278 &= 4 \cdot 69 + 2 \\ 69 &= 4 \cdot 17 + 1 \\ 17 &= 4 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \\ 1 &= 4 \cdot 0 + 1 \end{aligned}$$

da cui otteniamo la scrittura posizionale $N + S = (101120)_{\text{QUATTRO}}$ in base QUATTRO, che coincide con quanto già trovato in precedenza. Nell'altro verso, sviluppando esplicitamente l'espressione $N + S = (101120)_{\text{QUATTRO}}$ in base QUATTRO e svolgendo i conti scrivendo tutto in base DIECI otteniamo

$$\begin{aligned} N + S &= (101120)_{\text{QUATTRO}} = 1 \cdot 4^5 + 0 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = \\ &= 1 \cdot 1024 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 1024 + 64 + 16 + 8 = (1112)_{\text{DIECI}} \end{aligned}$$

dunque ritroviamo proprio l'espressione $N + S = (1112)_{\text{DIECI}}$ già ottenuta in precedenza.

[2] — (a) Ricordiamo che in un insieme ordinato in cui esista il minimo si dicono *atomi* gli (eventuali) elementi che coprono tale minimo. Nel caso in esame, il reticolo L ha per minimo l'elemento 0 , e gli elementi che lo coprono — cioè appunto gli atomi di L — sono tutti e soli i seguenti: a, c, d : in breve, $\{\text{atomi di } L\} = \{a, c, d\}$.

(b) Ricordiamo che in un reticolo un elemento q si dice \vee -irriducibile se in ogni sua \vee -fattorizzazione del tipo $q = r \vee s$ si ha necessariamente $r = q$ oppure $s = q$; in altre parole, non esistono \vee -fattorizzazioni di q se non quelle banali. Quando il reticolo è *finito* — come nel caso in esame — e quindi perfettamente descritto tramite il suo diagramma di Hasse, gli elementi \vee -irriducibili si riconoscono subito: sono quelli che coprono al più un solo elemento, dunque quelli che hanno al più una sola “zampa” che scende al disotto di essi; in particolare, *il minimo e tutti gli atomi sono sempre \vee -irriducibili*. Nel caso in esame, dall'analisi del diagramma di Hasse concludiamo subito che gli elementi \vee -irriducibili sono tutti e soli i seguenti: 0 (cioè il minimo), a, c, d (cioè gli atomi), e anche l'elemento b : in breve, $\{\vee\text{-irriducibili di } L\} = \{0, a, c, d, b\}$.

(c) Ricordiamo che in ogni reticolo *finito* — come è L — per ogni elemento esiste sempre (almeno) una \vee -fattorizzazione in elementi \vee -irriducibili, e quindi ne esiste anche (almeno) una che sia non ridondante. Nel caso del reticolo L in esame, per l'elementi 1 tutte le fattorizzazioni di questo tipo (a meno dell'ordine dei fattori) sono le seguenti:

$$1 = b \vee d \quad , \quad 1 = a \vee d \quad , \quad 1 = b \vee c \vee d \quad , \quad 1 = a \vee c \vee d$$

(d) Il reticolo L certamente *non* è un'algebra di Boole, per varie ragioni, ciascuna sufficiente di per sé. Ne elenchiamo alcune:

(d.1) L non è un'algebra di Boole perché ha troppi elementi \vee -irriducibili. Infatti, in generale in un'algebra di Boole gli elementi \vee -irriducibili sono soltanto gli atomi più il minimo: invece in L ci sono — come si vede dallo svolgimento dei punti (a) e (b) qui sopra — elementi \vee -irriducibili diversi dagli atomi e dal minimo, precisamente l'elemento b .

(d.2) L non è un'algebra di Boole perché alcuni elementi hanno più di un complemento. Ad esempio, l'elemento d ha per complemento ciascuno degli elementi a, b, e , e analogamente f ha per complemento ciascuno degli elementi a, b ; viceversa, entrambi gli elementi a, b , hanno per complemento ciascuno dei due elementi d, f . Invece in un'algebra di Boole ogni elemento ha un solo complemento.

(d.3) L non è un'algebra di Boole perché non è complementato, cioè alcuni elementi non hanno un complemento. Infatti, da una verifica diretta risulta subito che *non esiste complemento per l'elemento c* — mentre esiste (e magari anche più d'uno) per tutti gli altri elementi di L , come visto al punto (d.2) qui sopra.

(d.4) L non è un'algebra di Boole perché non è distributivo, come spiegato al punto (f) qui sotto.

(e) Il reticolo L non è complementato, in quanto — come già spiegato al punto (d.3) qui sopra — l'elemento c non ha un complemento.

(f) Il reticolo L non è distributivo, come possiamo vedere in diversi modi (tra loro collegati):

(f.1) L non è distributivo, perché esistono elementi $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in L$ che non soddisfano

uno o l'altra delle identità (che esprimono le proprietà distributive)

$$\ell_1 \vee (\ell_2 \wedge \ell_3) = (\ell_1 \vee \ell_2) \wedge (\ell_1 \vee \ell_3) \quad , \quad \ell_1 \wedge (\ell_2 \vee \ell_3) = (\ell_1 \wedge \ell_2) \vee (\ell_1 \wedge \ell_3) \quad (2)$$

Infatti, nel caso ad esempio di $\ell_1 = a$, $\ell_2 = b$, $\ell_3 = c$, abbiamo

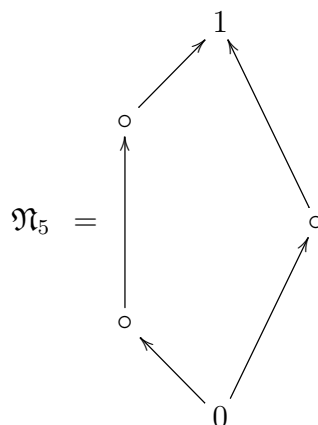
$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a \neq b = b \wedge e = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

dunque *non* vale l'identità di sinistra in (2); analogamente, per $\ell_1 = b$, $\ell_2 = a$, $\ell_3 = c$, abbiamo

$$b \wedge (a \vee c) = b \wedge e = b \neq a = a \vee 0 = (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$$

quindi *non* vale l'identità di destra in (2). Con calcoli analoghi si trova che le identità distributive in (2) *non* valgono anche per varie altre terne di elementi.

(f.2) *L non è distributivo* perché ci sono in *L* dei sottoreticoli isomorfi al reticolo (non distributivo) \mathfrak{N}_5 . Ricordiamo che tale reticolo è descritto dal diagramma di Hasse



e all'interno del reticolo *L* troviamo ad esempio che i sottoinsiemi

$$\begin{aligned} & \{0, a, b, c, e\} \quad , \quad \{0, a, e, d, 1\} \quad , \quad \{0, b, e, d, 1\} \\ & \{0, a, b, d, 1\} \quad , \quad \{0, a, b, f, 1\} \quad , \quad \{0, a, d, f, 1\} \quad , \quad \{0, b, d, f, 1\} \end{aligned}$$

sono tutti sottoreticoli isomorfi a \mathfrak{N}_5 . Questo implica, per il *Criterio di Distributività dei Reticoli*, che certamente *L* non è distributivo.

(f.3) *L non è distributivo* perché ci sono in *L* degli elementi che hanno più di un complemento (come visto al punto (d.2) qui sopra), mentre in ogni reticolo distributivo se un elemento ha complemento allora esso è unico.

[3] — Per prima cosa, in ciascuna equazione modulare nel sistema in esame, ogni numero può essere sostituito con un altro ad esso congruente (modulo il numero che fa da modulo — scusate la ripetizione! — nella specifica equazione in esame). Procedendo in questo modo, e osservando che

$$\begin{aligned} 123 &\equiv 3 \pmod{8} \quad , & -51 &\equiv -3 \pmod{8} \\ 276 &\equiv 6 \pmod{10} \quad , & -98 &\equiv 12 \pmod{10} \\ -79 &\equiv 5 \pmod{7} \quad , & 111 &\equiv 20 \pmod{7} \end{aligned}$$

il nostro sistema si trasforma così

$$\textcircled{*} : \begin{cases} 123x \equiv -51 \pmod{8} \\ 276x \equiv -98 \pmod{10} \\ -79x \equiv 111 \pmod{7} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x \equiv -3 \pmod{8} \\ 6x \equiv 12 \pmod{10} \\ 5x \equiv 20 \pmod{7} \end{cases}$$

e l'ultimo sistema a sua volta, *dividendo la seconda equazione per 2*, è equivalente a

$$\begin{cases} 3x \equiv -3 \pmod{8} \\ 3x \equiv 6 \pmod{5} \\ 5x \equiv 20 \pmod{7} \end{cases}$$

Ora, risolvendo facilmente in quest'ultimo le varie equazioni congruenziali, arriviamo al sistema *in forma cinese*

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{8} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

che possiamo ancora riscrivere nella forma

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{8} \\ x \equiv 7 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases} \quad (3)$$

dato che $-1 \equiv 7 \pmod{8}$ e $2 \equiv 7 \pmod{5}$.

Infine (per *or*), osserviamo che le prime due equazioni congruenziali, i cui moduli sono primi tra loro, hanno già in comune la soluzione $x = 7$; pertanto, dalla teoria generale sappiamo che le soluzioni del sottosistema costituito dalle prime due equazioni congruenziali sono tutte e sole quelle ottenute da tale soluzione particolare sommando multipli (interi) del prodotto dei due moduli, cioè $8 \cdot 5 = 40$. Dunque nel nostro sistema possiamo sostituire le prime due equazioni congruenziali con la singola equazione congruenziale che descrive il suddetto insieme delle loro soluzioni comuni, cioè $x \equiv 7 \pmod{40}$; così il sistema in (3) si trasforma nella forma più semplice

$$\textcircled{c} : \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{40} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases} \quad (4)$$

Resta ora da risolvere il sistema cinese \textcircled{c} in (4), equivalente a quello iniziale per cui l'insieme delle soluzioni sarà lo stesso per l'uno e per l'altro sistema.

Per procedere, possiamo adottare due diversi metodi:

Primo metodo: Risoluzione per Sostituzioni Successive: Risolviamo la prima equazione congruenziale in (4) — che in effetti è già risolta... — e sostituiamo i valori trovati nella seconda e nella terza: questo dà un nuovo sottosistema di due equazioni congruenziali, che

risolviamo a sua volta; iterando il procedimento, dopo un numero finito di passi troviamo il risultato finale. In dettaglio, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\textcircled{c} : \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{40} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases} &\implies \begin{cases} x = 7 + 40h \quad (h \in \mathbb{Z}) \\ 7 + 40h \equiv 4 \pmod{7} \end{cases} \implies \\
&\implies \begin{cases} x = 7 + 40h \quad (h \in \mathbb{Z}) \\ 40h \equiv -3 \pmod{7} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 + 40h \quad (h \in \mathbb{Z}) \\ 5h \equiv -10 \pmod{7} \end{cases} \implies \\
&\implies \begin{cases} x = 7 + 40h \quad (h \in \mathbb{Z}) \\ h \equiv -2 \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 + 40(5 + 7z) = 207 + 280z \\ h = 5 + 7z \quad (z \in \mathbb{Z}) \end{cases} \implies \\
&\implies x = 7 + 40(5 + 7z) = 207 + 280z \quad (z \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Dunque la conclusione è

$$x = 207 + 280z \quad (\forall z \in \mathbb{Z})$$

oppure, descrivendo lo stesso insieme di soluzioni in un modo diverso,

$$x \equiv 207 \pmod{280}, \quad \text{o anche} \quad x \equiv -73 \pmod{280}$$

In altri termini, l'insieme di tutte le soluzioni del sistema \textcircled{c} in (4) — e quindi del sistema originale $\textcircled{*}$ — è il sottoinsieme di \mathbb{Z} dato dalla classe di congruenza $[207]_{\equiv 280} = [-73]_{\equiv 280}$.

Secondo metodo: Applicazione del Teorema Cinese del Resto: Il sistema (4) è del tipo *in forma cinese*, cioè in cui le singole equazioni congruenziali sono già risolte (separatamente) e i diversi moduli — delle varie equazioni congruenziali: in questo caso 40 e 7 — sono a due a due coprimi. In tal caso, l'insieme \mathcal{S} di tutte le soluzioni del sistema si ottiene sommando multipli interi del prodotto di tutti i moduli del sistema — nel nostro caso, il prodotto $R := r_1 r_2 = 40 \cdot 7 = 280$ — ad una soluzione particolare x_0 del sistema. In breve, il suddetto insieme delle soluzioni è della forma

$$\mathcal{S} := \{ x = x_0 + Rz \mid z \in \mathbb{Z} \} = [x_0]_{\equiv R} \quad (5)$$

cioè l'intera classe di congruenza modulo $R = 280$ della soluzione particolare x_0 .

Per calcolare una soluzione particolare x_0 del sistema in (4), procediamo come segue. Siano $R := r_1 r_2 = 40 \cdot 7 = 280$, $R_1 := R/r_1 = 7$ e $R_2 := R/r_2 = 40$. Consideriamo le due equazioni congruenziali — nelle due incognite y_1 e y_2 — che si ottengono da quelle che figurano in \textcircled{c} moltiplicando l'incognita rispettivamente per R_1 e R_2 : esplicitamente queste sono

$$R_1 y_1 \equiv 7 \pmod{40}, \quad R_2 y_2 \equiv 4 \pmod{7}$$

cioè

$$7y_1 \equiv 7 \pmod{40}, \quad 40y_2 \equiv 4 \pmod{7} \quad (6)$$

In ciascuna di queste semplifichiamo i coefficienti e (eventualmente) i termini noti sostituendoli con altri numeri ad essi congruenti (modulo 40 nel primo caso e modulo 7 nel secondo) e più semplici, o comunque più “convenienti” per i nostri calcoli: otteniamo così

$$7y_1 \equiv 7 \pmod{40}, \quad -2y_2 \equiv 4 \pmod{7}$$

da cui otteniamo subito

$$y_1 \equiv 1 \pmod{40} \quad , \quad y_2 \equiv -2 \equiv 5 \pmod{7}$$

In particolare quindi una soluzione della prima o della seconda equazione è data rispettivamente da

$$y'_1 = 1 \quad , \quad y'_2 = -2 \tag{7}$$

A partire dalle soluzioni particolari in (7) delle equazioni congruenziali in (6) costruiamo una soluzione particolare x_0 del sistema © in (4) mediante la formula

$$x_0 := R_1 y'_1 + R_2 y'_2$$

che a conti fatti esplicitamente ci dà

$$x_0 := R_1 y'_1 + R_2 y'_2 = 7 \cdot 1 + 40 \cdot 5 + 7 \cdot 200 = 207$$

cioè $x_0 = 207$ che è la soluzione particolare già trovata col primo metodo (per sostituzioni successive). Da questo e da (5) troviamo l'insieme di tutte le soluzioni del sistema in esame, precisamente

$$\mathcal{S} := \{ x = 207 + 280z \mid z \in \mathbb{Z} \} = [207]_{\equiv 280}$$

come già si era ricavato mediante il primo metodo.

Attenzione: vale la pena osservare che le cose possono andare in modo diverso (ma equivalente!) nei passi intermedi. Ad esempio, nella (7) possiamo considerare le soluzioni

$$y''_1 = 1 \quad , \quad y''_2 = -2$$

e quindi a partire da queste passiamo a costruire la soluzione particolare

$$x''_0 := R_1 y''_1 + R_2 y''_2 = 7 \cdot 1 + 40 \cdot (-2) = 7 - 80 = -73$$

cioè $x''_0 = -73$. Da questa soluzione particolare e dalla (5) segue che l'insieme di tutte le soluzioni del sistema in esame è

$$\mathcal{S}'' := \{ x = -73 + 280z \mid z \in \mathbb{Z} \} = [-73]_{\equiv 280}$$

che è *lo stesso insieme già trovato in precedenza* in quanto $[-73]_{\equiv 280} = [207]_{\equiv 280}$, perché $-73 \equiv 207 \pmod{280}$ visto che $-73 - 207 = -280 = 280 \cdot (-1)$.

[4] — (a) Ricordiamo che una relazione ρ si dice (di) *equivalenza* se è *riflessiva*, *transitiva* e *simmetrica*. Proviamo allora che ciascuna di queste tre proprietà è soddisfatta dalla relazione σ .

(a.1) *Riflessività:* Per ogni $h \in \mathbb{N}_+$ si ha $h \cdot h = h^2$ (con $h \in \mathbb{N}_+ \dots$), dunque la definizione stessa ci dà $h \sigma h$, q.e.d.

(a.2) *Transitività*: Per ogni $h, k, \ell \in \mathbb{N}_+$ tali che $h \sigma k$ e $k \sigma \ell$, vogliamo dimostrare che $h \sigma \ell$. Ora,

$$\begin{aligned} (h \sigma k) \wedge (k \sigma \ell) &\implies \exists n, s \in \mathbb{N}_+ : (h \cdot k = n^2) \wedge (k \cdot \ell = s^2) \implies \\ &\implies \exists n, s \in \mathbb{N}_+ : h \cdot k \cdot k \cdot \ell = n^2 \cdot s^2 = (n \cdot s)^2 \implies \\ &\implies \exists n, s \in \mathbb{N}_+ : h \cdot \ell = n^2 \cdot s^2 = (n \cdot s)^2 / k^2 = ((n \cdot s)/k)^2 \implies \\ &\implies \exists q := (n \cdot s)/k \in \mathbb{Q}_+ : h \cdot \ell = q^2 \end{aligned}$$

e quindi ci resta soltanto da dimostrare che $q := (n \cdot s)/k \in \mathbb{N}_+ = \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Z}$, per cui basta provare che q stesso è un numero *intero*, che a sua volta equivale a dire che k divide $(n \cdot s)$ in \mathbb{Z} , o in altre parole che $(n \cdot s)$ è *multiplo intero* di k .

Per ogni intero primo p , siano a, b, c, x e y gli esponenti (in \mathbb{N}) con cui p compare nella fattorizzazione (unica) in primi di h, k, ℓ, n e s rispettivamente. Allora l'analogo esponente di p nella fattorizzazione di $h \cdot k^2 \cdot \ell$ è $a + 2b + c$, mentre quello nella fattorizzazione di $n^2 \cdot s^2$ è $2x + 2y = 2(x + y)$; d'altra parte sappiamo già che $h \cdot k^2 \cdot \ell = n^2 \cdot s^2$, quindi deduciamo che $a + 2b + c = 2(x + y)$, da cui $a + c = 2(x + y - b)$ e quindi $(x + y - b) = (a + c)/2$. In particolare questo ci dà $(x + y - b) = (a + c)/2 \geq 0$, dunque $b \leq (x + y)$; questo implica che p^b divide $(n \cdot s)$ — perché $(x + y)$ è proprio l'esponente di p nella fattorizzazione in primi di $(n \cdot s)$. Siccome questo analisi vale per ogni possibile primo p , possiamo concludere che k divide $(n \cdot s)$ in \mathbb{Z} , q.e.d.

(a.3) *Simmetria*: Per ogni $h, k \in E$ tali che $x \sigma y$, vogliamo provare che $k \sigma x$. Ora, le definizioni danno

$$\begin{aligned} h \sigma k &\implies \exists n \in \mathbb{N}_+ : h \cdot k = n^2 \implies \exists n \in \mathbb{N}_+ : k \cdot h = h \cdot k = n^2 \implies \\ &\implies \exists n \in \mathbb{N}_+ : k \cdot h = n^2 \implies k \sigma h \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(b) Per definizione, la classe di σ -equivalenza di 1 è il sottoinsieme di \mathbb{N}_+ dato da

$$[1]_\sigma := \{ h \in \mathbb{N}_+ \mid h \sigma 1 \}$$

Detto questo, il calcolo diretto ci dà

$$\begin{aligned} [1]_\sigma &:= \{ h \in \mathbb{N}_+ \mid h \sigma 1 \} = \{ h \in \mathbb{N}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}_+ : h \cdot 1 = n^2 \} = \\ &= \{ h \in \mathbb{N}_+ \mid \exists n \in \mathbb{N}_+ : h = n^2 \} = \{ n^2 \mid n \in \mathbb{N}_+ \} \end{aligned}$$

dunque $[1]_\sigma = \{ n^2 \mid n \in \mathbb{N}_+ \}$, l'insieme di tutti i *quadrati* in \mathbb{N}_+ .

[5] — (a) Per definizione, la matrice di adiacenza $M_{\vec{G}} = (\vec{m}_{i,j})_{i \in \{a,b,\dots,g\}}^{j \in \{a,b,\dots,g\}}$ di un multidigrafo \vec{G} è data da

$$\vec{m}_{i,j} := \text{numero di archi di } \vec{G} \text{ che vanno dal vertice } i \text{ al vertice } j$$

Nel caso in esame quindi si ha

$$M_{\vec{G}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La risposta al quesito posto si può trovare analizzando direttamente il multidigrafo, cercando i possibili cammini del tipo richiesto. Più in generale, ricordiamo che, in generale, il numero di cammini (orientati) di lunghezza n dal vertice i al vertice j coincide col coefficiente in posizione (i, j) — cioè sulla riga i e la colonna j — nella matrice $M_{\vec{G}}^n$ ottenuta elevando a potenza n -esima la matrice di adiacenza $M_{\vec{G}}$ del multidigrafo \vec{G} . Nel nostro caso ci interessa $n = 2$ e dunque calcoliamo la potenza $M_{\vec{G}}^2$: dalla definizione del prodotto (righe per colonne) tra matrici otteniamo

$$M_{\vec{G}}^2 := M_{\vec{G}} \cdot M_{\vec{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nell'ultima matrice possiamo ora leggere i coefficienti nelle posizioni (b, d) — cioè in seconda riga e quarta colonna — (f, g) e (g, a) , che sono rispettivamente 2, 0 e 1: pertanto in conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} (\text{numero di cammini (orientati) dal vertice } b \text{ al vertice } d) &= 2 \\ (\text{numero di cammini (orientati) dal vertice } f \text{ al vertice } g) &= 0 \\ (\text{numero di cammini (orientati) dal vertice } g \text{ al vertice } a) &= 1 \end{aligned}$$

Esplicitamente, nel primo e terzo caso tali cammini orientati, esplicitamente, sono i seguenti (come si trova dall'analisi diretta del multidigrafo):

$$\begin{aligned} \text{dal vertice } b \text{ al vertice } d : \quad & b \xrightarrow{\ell_4} b \xrightarrow{\ell_6} d, \quad b \xrightarrow{\ell_1} c \xrightarrow{\ell_7} d \\ \text{dal vertice } g \text{ al vertice } a : \quad & g \xrightarrow{\ell_{11}} c \xrightarrow{\ell_3} a \quad (\text{unico!}) \end{aligned}$$

(c) Ricordiamo che un multidigrafo si dice euleriano, risp. semieuleriano, se possiede un cammino euleriano chiuso, risp. un cammino euleriano aperto. Inoltre, un criterio per stabilire se un multidigrafo sia euleriano, semieuleriano, o nessuno dei due, formulato esclusivamente in termini dei gradi entranti e uscenti di ciascun vertice, è il seguente:

(E) — Un multidigrafo è euleriano se e soltanto se per un ogni suo vertice il grado entrante e il grado uscente coincidono, cioè $d^+(v) = d^-(v)$ per ogni vertice v .

(SE) — Un multidigrafo è semieuleriano se e soltanto se per un ogni suo vertice, tranne in due casi, il grado entrante e il grado uscente coincidono, mentre nei due casi eccezionali la differenza tra questi due gradi è $+1$ in un caso e -1 nell'altro caso; in altre parole, se e soltanto se esistono due vertici v_+ e v_- tali che $d^+(v_{\pm}) = d^-(v_{\pm}) \pm 1$ mentre $d^+(v) = d^-(v)$ per ogni altro vertice $v \neq v_{\pm}$ (in questo caso, ogni possibile cammino euleriano nel multidigrafo inizia in v_- e termina in v_+).

Per poter applicare questo criterio andiamo quindi a calcolare i vari gradi — entranti e uscenti — di tutti i vertici del multidigrafo \vec{G} . Ricordiamo che il grado entrante $d^+(v)$ e il grado uscente $d^-(v)$ di un vertice v sono definiti così:

$$\begin{aligned} d^+(v) &:= \text{numero di archi di } \vec{G} \text{ entranti in } v, \\ d^-(v) &:= \text{numero di archi di } \vec{G} \text{ uscenti da } v, \end{aligned}$$

Da queste definizioni e dalla definizione della matrice di adiacenza $M_{\vec{G}}$ — ricordata al punto (a) — si ottiene subito che

$$d^+(k) = \sum_{i \in \{a,b,\dots,g\}} \vec{m}_{i,k}, \quad d^-(k) = \sum_{j \in \{a,b,\dots,g\}} \vec{m}_{k,j}$$

Da questa formula generale troviamo, leggendo la forma esplicita della matrice $A_{\vec{G}}$, che i gradi richiesti sono

$$\begin{aligned} d^+(a) &= 1, & d^+(b) &= 3, & d^+(c) &= 3, & d^+(d) &= 2, \\ & & d^+(e) &= 0, & d^+(f) &= 2, & d^+(g) &= 2 \\ \\ d^-(a) &= 1, & d^-(b) &= 3, & d^-(c) &= 3, & d^-(d) &= 2, \\ & & d^-(e) &= 1, & d^-(f) &= 2, & d^-(g) &= 1 \end{aligned}$$

A questo punto, dall'analisi dei gradi (entranti e uscenti) elencati qui sopra osserviamo che i vertici $v_+ := g$ e $v_- := e$ soddisfano le condizioni citate in (SE) qui sopra, e pertanto possiamo concludere che il multidigrafo \vec{G} è semieuleriano (e non euleriano); in aggiunta, possiamo precisare che ogni possibile cammino euleriano nel multidigrafo inizia necessariamente dal vertice e e termina necessariamente nel vertice g .

Per concludere, un possibile cammino semieuleriano in \vec{G} — descritto come successione di vertici e archi, nell'ordine in cui vengono percorsi — è ad esempio il seguente:

$$\begin{aligned} e \xrightarrow{\ell_{12}} f \xrightarrow{\ell_{13}} g \xrightarrow{\ell_{11}} c \xrightarrow{\ell_5} c \xrightarrow{\ell_3} a \xrightarrow{\ell_2} b \xrightarrow{\ell_1} & \\ & \xrightarrow{\ell_1} c \xrightarrow{\ell_7} d \xrightarrow{\ell_9} f \xrightarrow{\ell_8} b \xrightarrow{\ell_4} b \xrightarrow{\ell_6} d \xrightarrow{\ell_{10}} g \end{aligned}$$

Un altro è

$$\begin{aligned} e \xrightarrow{\ell_{12}} f \xrightarrow{\ell_8} b \xrightarrow{\ell_6} d \xrightarrow{\ell_{10}} g \xrightarrow{\ell_{11}} c \xrightarrow{\ell_5} c \xrightarrow{\ell_3} & \\ & \xrightarrow{\ell_3} a \xrightarrow{\ell_2} b \xrightarrow{\ell_4} b \xrightarrow{\ell_1} c \xrightarrow{\ell_7} d \xrightarrow{\ell_9} f \xrightarrow{\ell_{13}} g \end{aligned}$$

e ne esistono poi molti altri ancora.

(d) Foglie: Ricordiamo che, per definizione, una *foglia* del multigrafo $\overline{\mathbb{G}}$ è un vertice v_\bullet tale che $d_{\overline{\mathbb{G}}}(v_\bullet) = 1$, dove $d_{\overline{\mathbb{G}}}(v)$ indica il grado del vertice v nel multigrafo $\overline{\mathbb{G}}$, e ha la proprietà che $d_{\overline{\mathbb{G}}}(v) = d_{\overline{\mathbb{G}}}^+(v) + d_{\overline{\mathbb{G}}}^-(v)$. Perciò, dalla lista dei gradi — entranti e uscenti — nel multidigrafo $\overrightarrow{\mathbb{G}}$ già ottenuta in precedenza otteniamo che esiste esattamente una foglia in $\overline{\mathbb{G}}$, precisamente il vertice $v_\bullet = e$.

Ponti: Ricordiamo che, per definizione, un *ponte* di un multigrafo \mathbb{G} è un lato (o “spigolo”) ℓ con la proprietà che la componente connessa di $\overline{\mathbb{G}}$ che contiene ℓ stesso si spezza in due componenti connesse quando il lato ℓ viene rimosso da \mathbb{G} . Inoltre, se in \mathbb{G} c’è una foglia, diciamo v_\bullet , allora esiste un unico lato ℓ incidente in v_\bullet , e quindi la foglia v_\bullet è collegata al resto del multigrafo \mathbb{G} unicamente tramite il lato ℓ : ne segue che rimuovendo ℓ da \mathbb{G} si ottiene un sottomultigrafo in cui la foglia v_\bullet forma una nuova componente connessa a sé — e quindi il lato ℓ è un ponte di \mathbb{G} .

Ora, dal passo precedente sappiamo che nel multigrafo $\mathbb{G} := \overline{\mathbb{G}}$ c’è un’unica foglia, precisamente $v_\bullet := e$: allora applicando l’analisi precedente possiamo concludere che l’unico lato ℓ in $\overline{\mathbb{G}}$ incidente in e — che corrisponde in $\overrightarrow{\mathbb{G}}$ all’arco ℓ_{12} — è un ponte di $\overline{\mathbb{G}}$. Inoltre, dall’analisi diretta di $\overline{\mathbb{G}}$ troviamo che no ci sono altri ponti, cioè il suddetto spigolo (corrispondente all’arco) ℓ_{12} è effettivamente *l’unico* ponte esistente in $\overline{\mathbb{G}}$.

(e) Ricordiamo che la matrice di adiacenza $M_{\overline{\mathbb{G}}}$ del multigrafo $\overline{\mathbb{G}}$ associato al multidigrafo $\overrightarrow{\mathbb{G}}$ si ottiene facilmente dalla matrice di adiacenza $M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}}$ del multidigrafo $\overrightarrow{\mathbb{G}}$ tramite la formula

$$M_{\overline{\mathbb{G}}} = M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}} + M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}}^T \quad (8)$$

dove $M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}}^T$ indica la matrice *trasposta* di $M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}}$, cioè la matrice ottenuta da $M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}}$ scambiandone le righe (nell’ordine) con le colonne (nell’ordine). Inserendo nella (8) la forma esplicita della matrice $M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}}$ otteniamo

$$\begin{aligned} M_{\overline{\mathbb{G}}} &= M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}} + M_{\overrightarrow{\mathbb{G}}}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0+0 & 1+0 & 0+1 & 0+0 & 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ 0+1 & 1+1 & 1+0 & 1+0 & 0+0 & 0+1 & 0+0 \\ 1+0 & 0+1 & 1+1 & 1+0 & 0+0 & 0+0 & 0+1 \\ 0+0 & 0+1 & 0+1 & 0+0 & 0+0 & 1+0 & 1+0 \\ 0+0 & 0+0 & 0+0 & 0+0 & 0+0 & 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 & 0+0 & 0+1 & 0+1 & 0+0 & 1+0 \\ 0+0 & 0+0 & 1+0 & 0+1 & 0+0 & 0+1 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dunque in conclusione la matrice richiesta è

$$M_{\overline{\mathbf{G}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
