

MATEMATICA DISCRETA

CdL in Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2017–2018 — Esame scritto del 3 Luglio 2018 — Sessione Estiva, II appello

Testo & Svolgimento

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in *corsivo* con grafia leggibile.

..... ★

[1] Si consideri il polinomio booleano $P_{Q,R} = P_{Q,R}(h, k, \ell, t)$ definito da

$$P_{Q,R}(h, k, \ell, t) := \left(\left(h' \wedge ((\ell' \vee t)' \vee (k \wedge t)) \right) \wedge 0' \wedge \left((t' \wedge (k \vee t')) \vee t \right) \right) \vee \\ \vee \left(\ell' \wedge \left(\left(h \wedge ((Q \vee R)' \vee h) \right) \vee h' \right) \wedge 1 \wedge \left((h' \vee k)' \vee k \right) \right)$$

dipendente a sua volta dai due polinomi $Q := Q(h, k, \ell, t)$ e $R := R(h, k, \ell, t)$.

(a) Calcolare una *somma di prodotti fondamentali* equivalente a $P_{Q,R}$.

(b) Calcolare una *seconda* somma di prodotti fondamentali equivalente a $P_{Q,R}$, diversa da quella ottenuta in (a), in modo che una delle due sia *più semplice* dell'altra; in particolare, si spieghi perché l'una sia più semplice dell'altra.

[2] Dato l'insieme $\{\underline{\epsilon}, \underline{\ell}, \underline{\forall}, \underline{\$}\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}(\{\underline{\epsilon}, \underline{\ell}, \underline{\forall}, \underline{\$}\})$, dotato della relazione (d'ordine) di inclusione; *per semplificare la notazione indicheremo un sottoinsieme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $\underline{x_1 x_2 \dots x_n} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$* . Si consideri poi in $\mathcal{P}(\{\underline{\epsilon}, \underline{\ell}, \underline{\forall}, \underline{\$}\})$ il sottoinsieme

$$\mathbb{E} := \{ \emptyset, \underline{\epsilon}, \underline{\ell}, \underline{\forall}, \underline{\ell\forall}, \underline{\epsilon\ell\forall}, \underline{\epsilon\ell\$}, \underline{\epsilon\forall\$}, \underline{\epsilon\ell\forall\$} \}$$

e i suoi sottoinsiemi

$$\mathbb{E}' := \mathbb{E} \setminus \{ \underline{\ell\forall} \}, \quad \mathbb{E}'' := \mathbb{E} \setminus \{ \underline{\epsilon\ell\forall} \}$$

In tali (sotto)insiemi \mathbb{E} , \mathbb{E}' e \mathbb{E}'' consideriamo ancora la relazione (d'ordine) di inclusione.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathbb{E}; \subseteq)$.

(b) Verificare se l'insieme ordinato $(\mathbb{E}; \subseteq)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia distributivo.

(c) Verificare se l'insieme ordinato $(\mathbb{E}'; \subseteq)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia un'algebra di Boole.

(d) Verificare se l'insieme ordinato $(\mathbb{E}''; \subseteq)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia un'algebra di Boole.

[3] Determinare tutti i numeri interi $x \in \mathbb{Z}$ per i quali si abbia simultaneamente
 $[63]_{105} \cdot [x]_{105} = [189]_{105}$ in \mathbb{Z}_{105} e $317x \equiv -49 \pmod{20}$ in \mathbb{Z} .

[4] Utilizzando il *Principio di Induzione*, si dimostri che per ogni insieme finito e non vuoto A con $n := |A|$ elementi, l'insieme $\underline{2}^A$ delle funzioni caratteristiche in A — dove $\underline{2} := \{0, 1\}$ — ha esattamente 2^n elementi, cioè $|\underline{2}^A| = 2^n$.

[5] Si consideri il multidigrafo \vec{G} , avente esattamente sei vertici v_1, v_2, \dots, v_6 , la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_{\vec{G}} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia \mathbf{G} il multigrafo associato al multidigrafo \vec{G} .

(a) Calcolare il numero di cammini (orientati) di lunghezza 3 da v_2 a v_6 , da v_5 a v_2 , da v_4 a v_3 e da v_6 a v_2 . In ciascun caso, se tale numero è maggiore di zero si determini un cammino esplicito del tipo considerato.

(b) Determinare, *direttamente dall'analisi della sua matrice di adiacenza* $A_{\vec{G}}$, il numero di archi del multidigrafo \vec{G} .

(c) Determinare se esistano nel multidigrafo \vec{G} dei cicli (orientati). In caso negativo, si spieghi perché non esistano; in caso positivo, si determini esplicitamente almeno un ciclo (orientato).

(d) Determinare esplicitamente due diversi alberi ricoprenti del multigrafo \mathbf{G} .

(e) Descrivere graficamente (= disegnare...) il multidigrafo \vec{G} .

[6] Sia X un insieme, e siano λ la relazione in $\mathcal{P}(X)$ definita da

$$A \lambda B \iff \left(A \cap (X \setminus B) = \emptyset \right) \& (|B| \leq |A|) \quad \text{per ogni } A, B \in \mathcal{P}(X)$$

(a) Dimostrare che λ è una relazione d'ordine in $\mathcal{P}(X)$.

(b) Dimostrare che, se l'insieme X è finito, allora la relazione λ è l'identità in $\mathcal{P}(X)$.

(c) Dimostrare che, se l'insieme X è infinito, allora la relazione λ non è simmetrica.

SVOLGIMENTO

N.B.: lo svolgimento qui presentato è molto lungo... Questo non significa che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si approfitta per spiegare — in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con molti particolari tutti gli aspetti della teoria toccati più o meno a fondo dal testo in questione.

[1] — (a) Applicando le regole usuali del calcolo booleano trasformiamo il polinomio assegnato $P_{Q,R} = P_{Q,R}(h, k, \ell, t)$ in polinomi equivalenti come segue:

$$\begin{aligned}
 P_{Q,R}(h, k, \ell, t) &:= \left(\left(h' \wedge ((\ell' \vee t)') \vee (k \wedge t) \right) \wedge 0' \wedge \left((t' \wedge (k \vee t')) \vee t \right) \right) \vee \\
 &\quad \vee \left(\ell' \wedge \left(\left(h \wedge ((Q \vee R)') \vee h \right) \vee h' \right) \wedge 1 \wedge \left((h' \vee k)'\ \vee k \right) \right) \sim \\
 &\sim \left(\left(h' \wedge ((\ell'' \wedge t') \vee (k \wedge t)) \right) \wedge 1 \wedge (t' \vee t) \right) \vee \\
 &\quad \vee \left(\ell' \wedge (h \vee h') \wedge 1 \wedge \left((h'' \wedge k') \vee k \right) \right) \sim \\
 &\sim \left(\left(h' \wedge ((\ell \wedge t') \vee (k \wedge t)) \right) \wedge (t' \vee t) \right) \vee \left(\ell' \wedge (h \vee h') \wedge \left((h \wedge k') \vee k \right) \right) \sim \\
 &\quad \sim \left(\left(h' \wedge ((\ell \wedge t') \vee (k \wedge t)) \right) \wedge 1 \right) \vee \left(\ell' \wedge 1 \wedge \left((h \wedge k') \vee k \right) \right) \sim \\
 &\quad \sim \left(h' \wedge ((\ell \wedge t') \vee (k \wedge t)) \right) \vee \left(\ell' \wedge \left((h \wedge k') \vee k \right) \right) \sim \\
 &\sim \left(h' \wedge (\ell \wedge t') \right) \vee \left(h' \wedge (k \wedge t) \right) \vee \left(\ell' \wedge (h \wedge k') \right) \vee (\ell' \wedge k) \sim \\
 &\quad \sim (h' \wedge \ell \wedge t') \vee (h' \wedge k \wedge t) \vee (h \wedge k' \wedge \ell') \vee (k \wedge \ell')
 \end{aligned}$$

dunque in conclusione si ha

$$P_{Q,R}(h, k, \ell, t) \sim (h' \wedge \ell \wedge t') \vee (h' \wedge k \wedge t) \vee (h \wedge k' \wedge \ell') \vee (k \wedge \ell') \quad (1)$$

dove l'espressione di destra è appunto una somma di prodotti fondamentali S' che è equivalente, per costruzione, al polinomio $P_{Q,R}(h, k, \ell, t)$ di partenza.

(b) Ricordiamo che ad ogni somma di prodotti S si associa una coppia di numeri naturali (E_S, F_S) definita da

$$\begin{aligned}
 E_S &:= \text{somma dei gradi dei prodotti che compaiono nella somma} , \\
 F_S &:= \text{numero di prodotti che compaiono nella somma}
 \end{aligned}$$

Inoltre, date due somme di prodotti S' e S'' , si dice che

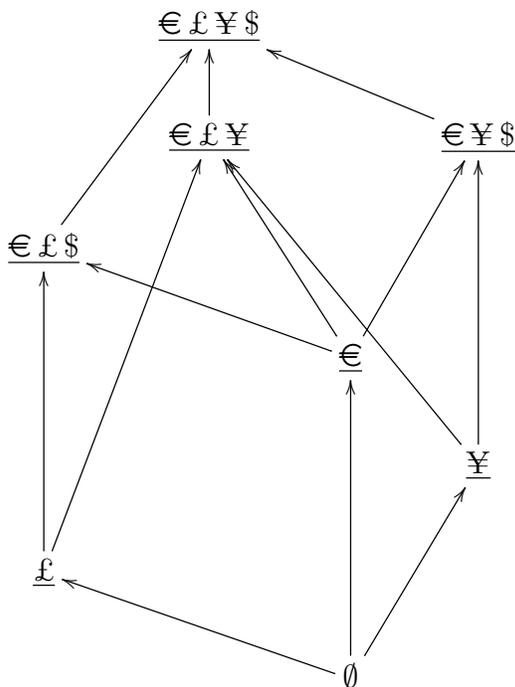
$$\begin{aligned}
 &S' \text{ è più semplice di } S'' \text{ se} \\
 &E_{S'} \leq E_{S''} \quad , \quad F_{S'} \leq F_{S''} \quad , \quad (E_{S'}, F_{S'}) \neq (E_{S''}, F_{S''})
 \end{aligned}$$

Ora, ricordando che

$$k \wedge \ell' \sim k \wedge \ell' \wedge 1 \sim k \wedge \ell' \wedge (t \vee t') \sim (k \wedge \ell' \wedge t) \vee (k \wedge \ell' \wedge t') \quad (2)$$

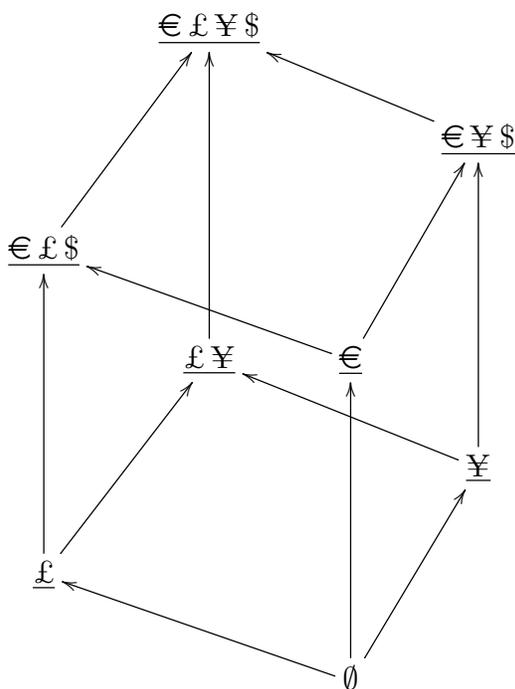
dei minoranti di $\underline{\text{€}}\underline{\text{£}}\underline{\text{\$}}$ e di $\underline{\text{€}}\underline{\text{£}}\underline{\text{¥}}$; ma tale insieme è $\{\underline{\text{£}}, \underline{\text{€}}, \emptyset\}$, che contiene due diversi elementi massimali — esattamente $\underline{\text{£}}$ e $\underline{\text{€}}$ — e (quindi) non possiede massimo.

(c) L'insieme ordinato $(\mathbb{E}'; \subseteq)$ non è un reticolo, per la stessa ragione per cui non lo è $(\mathbb{E}; \subseteq)$. Infatti, il diagramma di Hasse di $(\mathbb{E}'; \subseteq)$ è



e quindi, esattamente come nel caso (a), non esistono $\sup(\underline{\text{£}}, \underline{\text{€}})$ né $\inf(\underline{\text{€}}\underline{\text{£}}\underline{\text{\$}}, \underline{\text{€}}\underline{\text{£}}\underline{\text{¥}})$.

(d) Il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathbb{E}''; \subseteq)$ è



ciò in particolare è un “ipercubetto”. Da questo vediamo subito che tale insieme ordinato è isomorfo (=“è fatto come”) $\underline{2}^{\times 3}$ con l’ordine prodotto, o come $(\mathcal{P}(X_3); \subseteq)$ — dove X_3 è un qualsiasi insieme di tre elementi. Sapendo che $\underline{2}^{\times 3}$ (con l’ordine prodotto) e $(\mathcal{P}(X_3); \subseteq)$ sono reticoli e anche algebre di Boole, concludiamo che anche l’insieme ordinato $(\mathbb{E}''; \subseteq)$ è a sua volta un reticolo e pure un’algebra di Boole.

[3] — Per cominciare osserviamo che la condizione $[63]_{105} \cdot [x]_{105} = [189]_{105}$ — in \mathbb{Z}_{105} , cioè tra classi resto modulo 105 — è equivalente a $63x \equiv 189 \pmod{105}$ — in \mathbb{Z} , cioè tra numeri interi. Pertanto, il problema originario è *equivalente* al problema di *determinare tutti i numeri interi $x \in \mathbb{Z}$ per i quali si abbia simultaneamente*

$$63x \equiv 189 \pmod{105} \quad e \quad 317x \equiv -49 \pmod{20}$$

e quindi, in ultima analisi, è *equivalente a risolvere il sistema di equazioni congruenziali*

$$\textcircled{*} : \begin{cases} 63x \equiv 189 \pmod{105} \\ 317x \equiv -49 \pmod{20} \end{cases} \quad (4)$$

Procediamo dunque a risolvere il sistema in (4). Con una serie di passaggi abbastanza ovvi otteniamo

$$\begin{aligned} \textcircled{*} : & \begin{cases} 63x \equiv 189 \pmod{105} \\ 317x \equiv -49 \pmod{20} \end{cases} \implies \begin{cases} 63x \equiv_{105} 84 \\ (20 \cdot 16 - 3)x \equiv_{20} -(20 \cdot 2 + 9) \end{cases} \implies \\ \implies & \begin{cases} 63x \equiv_{105} 84 \\ -3x \equiv_{20} -9 \end{cases} \xrightarrow{\text{div. per 21 in 1ª eq.}} \begin{cases} 3x \equiv_5 4 \\ -3x \equiv_{20} -9 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x \equiv_5 (3 \cdot 3 + 4) \\ +3x \equiv_{20} +9 \end{cases} \implies \\ \implies & \begin{cases} 3x \equiv_5 9 \\ 3x \equiv_{20} 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv_5 3 \\ x \equiv_{20} 3 \end{cases} \implies x \equiv_{20} 3 \implies x \equiv 3 \pmod{20} \end{aligned}$$

così la conclusione finale è che l’insieme di interi richiesto è $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \equiv 3 \pmod{20}\}$, cioè la classe di \equiv_{20} -congruenza di 3, data da $[3]_{\equiv_{20}} = 3 + 20\mathbb{Z} = \{3 + 20z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

[4] — Dovendo dimostrare che $|\underline{2}^A| = 2^n$ — con $n = |A|$ — utilizzando il principio di induzione, adottiamo quello in forma debole, nei due passi *Base dell’Induzione* e *Passo Induttivo*.

Base dell’Induzione: dobbiamo dimostrare che la tesi è vera per $n = 1$, che è il minimo numero di elementi che possa avere un insieme A non vuoto. Ora, se $n := |A| = 1$ vuol dire che $A = \{a\}$ per un unico elemento a ; perciò le funzioni caratteristiche $f : A = \{a\} \rightarrow \underline{2} := \{0, 1\}$ sono esattamente tante quante le possibili scelte dell’immagine $f(a)$ di a , e queste scelte sono esattamente due perché $f(a)$ può e deve essere un qualsiasi elemento di $\underline{2}$, che è un insieme di due elementi. Pertanto abbiamo

$$|\underline{2}^A| = |\underline{2}^{\{a\}}| = |\underline{2}| = 2 = 2^1, \quad \text{q.e.d.}$$

Passo Induttivo: dobbiamo dimostrare che, dato un $s (\in \mathbb{N})$ qualsiasi, SE è vera la tesi per s , **ALLORA** è vera la tesi anche per $s+1$. Dunque abbiamo (=Ipotesi induttiva)

$$H.I.: \text{ per ogni insieme finito non vuoto } A' \text{ con } s \text{ elementi, si ha } |\underline{2}^{A'}| = 2^s \quad (5)$$

e dobbiamo dimostrare (=Tesi Induttiva) che

$$T.I.: \text{ per ogni insieme finito non vuoto } A'' \text{ con } s+1 \text{ elementi, si ha } |\underline{2}^{A''}| = 2^{s+1} \quad (6)$$

Per ottenere dunque la (6) dalla (5), sia A'' un insieme con $s+1$ elementi, che descriviamo come $A'' = \{a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\}$; in particolare, $A'' = A' \cup \{a_{s+1}\}$ dove $A' = \{a_1, \dots, a_s\}$ è un insieme non vuoto di s elementi. Ora, una qualunque funzione caratteristica su A''

$$f : A'' = A' \cup \{a_{s+1}\} \longrightarrow \underline{2}$$

è univocamente determinata da $f|_{A'} : A' \longrightarrow \underline{2}$ e dalla scelta di $f(a_{s+1})$; chiaramente $f|_{A'}$ è una funzione caratteristica su A' , e quindi per l'ipotesi induttiva (5) sappiamo che tale $f|_{A'}$ può essere scelta in 2^s modi diversi, mentre l'elemento $f(a_{s+1}) \in \underline{2}$ può essere scelto in $|\underline{2}| = 2$ modi diversi. Pertanto, le possibili funzioni $f : A'' \longrightarrow \underline{2}$ in totale sono esattamente $2^s \cdot 2 = 2^{s+1}$, e la (6) è dimostrata.

[5] — (a) Ricordiamo che, in generale, il numero di cammini (orientati) di lunghezza n dal vertice v_i al vertice v_j coincide col coefficiente in posizione (i, j) — cioè sulla riga i e la colonna j — nella matrice $A_{\vec{G}}^n$ ottenuta elevando a potenza n -esima la matrice di adiacenza $A_{\vec{G}}$ del multidigrafo \vec{G} . Nel nostro caso ci interessa $n = 3$ e dunque calcoliamo la potenza $A_{\vec{G}}^3$: le definizioni danno

$$A_{\vec{G}}^2 := A_{\vec{G}} \cdot A_{\vec{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\vec{G}}^3 := A_{\vec{G}} \cdot A_{\vec{G}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nell'ultima matrice possiamo ora leggere i coefficienti nelle posizioni $(2, 6)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$ e $(6, 2)$, che sono rispettivamente 1, 1, 2 e 4: pertanto in conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \text{numero di cammini (orientati) da } v_2 \text{ a } v_6 &= 1 \\ \text{numero di cammini (orientati) da } v_5 \text{ a } v_2 &= 2 \\ \text{numero di cammini (orientati) da } v_4 \text{ a } v_3 &= 0 \\ \text{numero di cammini (orientati) da } v_6 \text{ a } v_2 &= 4 \end{aligned}$$

Esplicitamente, nel primo, secondo e quarto caso abbiamo che, ad esempio, tali cammini orientati (esplicitamente) sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
 & \text{da } v_2 \text{ a } v_6 : \quad v_2 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_6 \quad (\text{unico!}) \\
 & \text{da } v_5 \text{ a } v_2 : \quad v_5 \longrightarrow v_6 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \quad , \quad v_5 \longrightarrow v_6 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \\
 & \text{(dove “} v_1 \longrightarrow v_2 \text{” e “} v_1 \dashrightarrow v_2 \text{” indicano i due diversi archi in } \vec{G} \text{ da } v_1 \text{ a } v_2) \\
 & \text{da } v_6 \text{ a } v_2 : \quad v_6 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \quad , \quad v_6 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_1 \dashrightarrow v_2 \quad , \\
 & \quad \quad \quad v_6 \dashrightarrow v_1 \dashrightarrow v_2 \longrightarrow v_2 \quad , \quad v_6 \dashrightarrow v_1 \dashrightarrow v_2 \dashrightarrow v_2
 \end{aligned}$$

(b) Ricordiamo che, per definizione, il coefficiente $a_{i,j}$ nella posizione (i,j) della matrice di adiacenza $A_{\vec{G}}$ del multidigrafo \vec{G} indica il numero di archi che vanno dal vertice v_i al vertice v_j . Ogni arco di \vec{G} quindi contribuisce a incrementare di +1 uno (e uno solo) di tali coefficienti. Perciò il numero totale degli archi di \vec{G} è dato dalla somma $\sum_{i,j=1}^6 a_{i,j}$ di tutti i coefficienti della suddetta matrice di adiacenza, che dal calcolo diretto risulta essere

$$\text{numero di archi di } \vec{G} = \sum_{i,j=1}^6 a_{i,j} = 12$$

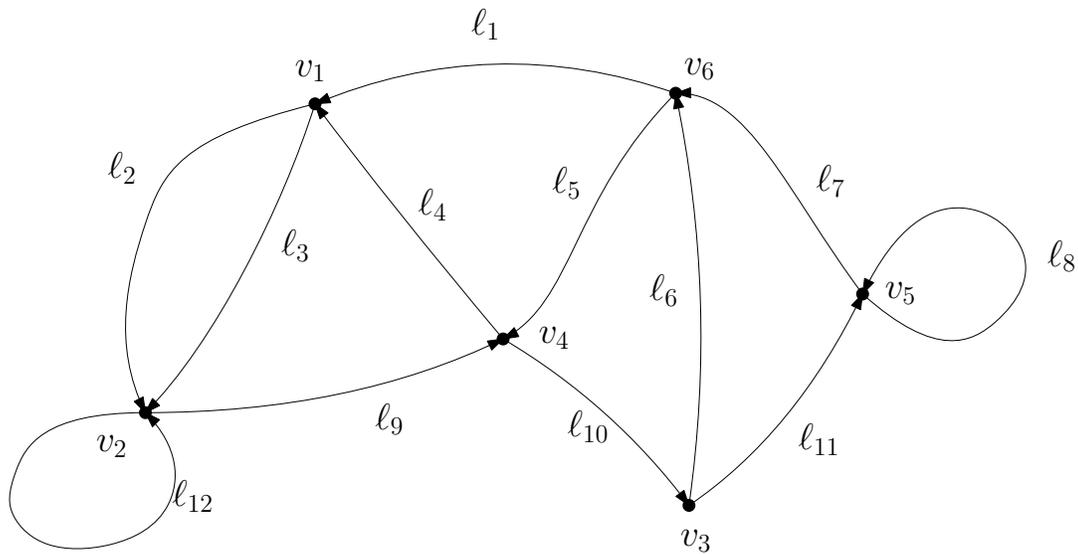
(c) In qualsiasi multidigrafo, ogni coppia — se esiste — è un ciclo orientato di lunghezza 1; inoltre, esiste un cappio se e soltanto nella matrice di adiacenza compare un coefficiente sulla diagonale che sia diverso da 0 (e compare nella posizione corrispondente al vertice su cui sta il cappio in questione). Nel caso del multidigrafo \vec{G} in esame si ha $a_{2,2} = 1 \neq 0$ e $a_{5,5} = 1 \neq 0$, dunque esistono un cappio in v_2 e uno in v_5 : come già osservato, questi sono particolari cicli orientati in \vec{G} .

Più in generale, osserviamo che in un multidigrafo qualsiasi un cammino di lunghezza k che non passi mai due volte per uno stesso punto tocca in totale $(k+1)$ vertici diversi; pertanto, in un multidigrafo che abbia un numero finito n di vertici, ogni cammino di lunghezza maggiore o uguale a n deve necessariamente passare due volte per uno stesso vertice, e dunque contiene un ciclo. Allora, per capire se un multidigrafo con un numero finito n di vertici contenga cicli, è sufficiente controllare se possiede cammini di lunghezza maggiore o uguale a n , dunque — secondo l’analisi fatta al punto (a) — basta vedere se la potenza n -esima della sua matrice di adiacenza è diversa dalla matrice nulla. Nel caso del multidigrafo \vec{G} in esame, che ha esattamente $n = 6$ vertici, dobbiamo calcolare la potenza sesta $A_{\vec{G}}^6$, che possiamo ottenere come $A_{\vec{G}}^6 = A_{\vec{G}}^3 \cdot A_{\vec{G}}^3$ sfruttando i calcoli fatti per il precedente punto (a), così che otteniamo

$$A_{\vec{G}}^6 = A_{\vec{G}}^3 \cdot A_{\vec{G}}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 8 & 14 & 6 & 6 \\ 10 & 21 & 7 & 12 & 7 & 7 \\ 11 & 20 & 8 & 13 & 6 & 6 \\ 9 & 20 & 5 & 16 & 7 & 7 \\ 11 & 20 & 8 & 13 & 6 & 6 \\ 8 & 20 & 5 & 13 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

(N.B.: naturalmente, a noi basta scoprire che anche un solo solo coefficiente sia zero...). Questo ci dice che ci sono cicli in \vec{G} , ma non ci aiuta a individuarne esplicitamente uno!

(d) Il multidigrafo \vec{G} può essere rappresentato graficamente così:



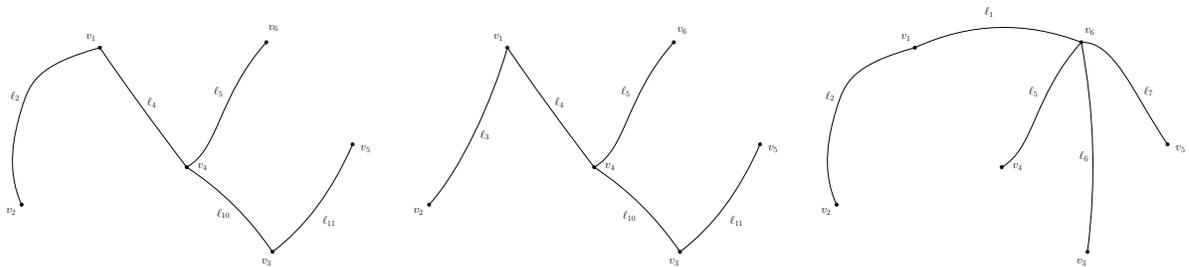
(e) Nel multigrafo \mathbf{G} soggiacente (=associato) al multidigrafo \vec{G} , indichiamo gli spigoli con gli stessi simboli l_s utilizzati per denotare i corrispondenti archi in \vec{G} . È chiaro che esistono alberi ricoprenti del multigrafo \mathbf{G} , perché quest'ultimo è ovviamente *connesso*. Inoltre, tali alberi sono senz'altro molti: senza bisogno di elencarli tutti, facciamo alcune osservazioni che ci aiutano a trovarli.

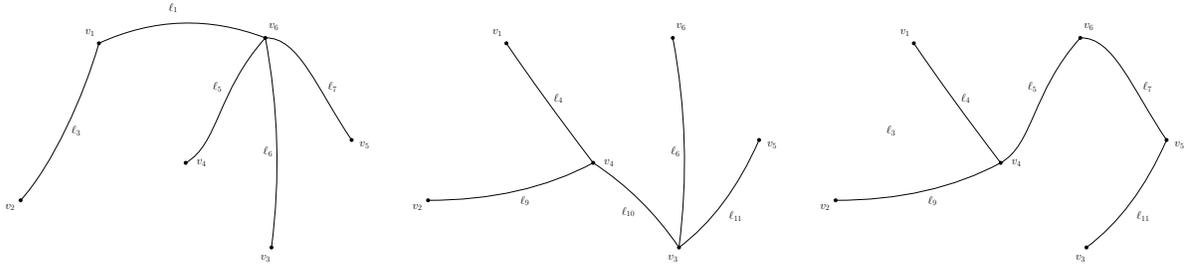
Per definizione, un albero ricoprente \mathbf{T} di \mathbf{G} contiene *tutti* i vertici di \mathbf{G} ma soltanto *alcuni* spigoli: precisamente ne deve contenere esattamente $6 - 1 = 5$, dato che i vertici di \mathbf{T} , essendo quelli di \mathbf{G} , sono 6: dunque *ciascun albero ricoprente \mathbf{T} è individuato univocamente dalla scelta di 5 spigoli di \mathbf{G}* . Inoltre, osserviamo che i cappi l_8 e l_{12} e la coppia di spigoli (l_2, l_3) sono particolari cicli in \mathbf{G} : dato che \mathbf{T} dev'essere aciclico, ne deduciamo che \mathbf{T} *non deve contenere l_8 né l_{12} e può contenere al più uno solo di due spigoli l_2 e l_3* . Detto questo, restano ancora molte scelte possibili: tra le tante, presentiamo le sei seguenti scelte di cinque spigoli che individuano altrettanti alberi ricoprenti di \mathbf{G}

$$\{l_2, l_4, l_5, l_{10}, l_{11}\}, \quad \{l_3, l_4, l_5, l_{10}, l_{11}\}, \quad \{l_1, l_2, l_5, l_6, l_7\}$$

$$\{l_1, l_3, l_5, l_6, l_7\}, \quad \{l_4, l_6, l_9, l_{10}, l_{11}\}, \quad \{l_4, l_5, l_7, l_9, l_{11}\}$$

che graficamente sono rappresentati così:





Ovviamente — come già osservato — esistono anche molti altri alberi ricoprenti di \mathbf{G} .

[6] — Per cominciare, osserviamo che la relazione λ può essere descritta in modo alternativo e più chiaro, come segue. Dalla definizione ricaviamo, per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned} A \lambda B &\iff (A \cap (X \setminus B) = \emptyset) \ \& \ (|B| \leq |A|) \iff \\ &\iff (A \subseteq B) \ \& \ (|B| \leq |A|) \iff (A \subseteq B) \ \& \ (|A| = |B|) \end{aligned}$$

perché chiaramente $A \cap (X \setminus B) = \emptyset \iff A \subseteq B$, inoltre $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$ e infine $(|A| \leq |B|) \ \& \ (|B| \leq |A|) \iff (|A| = |B|)$. Dunque in conclusione abbiamo

$$A \lambda B \iff (A \subseteq B) \ \& \ (|A| = |B|) \quad (7)$$

Ricordiamo ora che una relazione si dice (di) *ordine* se è *riflessiva*, *transitiva* e *antisimmetrica*, mentre si dice (di) *equivalenza* se è *riflessiva*, *transitiva* e *simmetrica*.

Indicando con χ la relazione in $\mathcal{P}(X)$ data da “avere la stessa cardinalità”, cioè definita da $A \chi B \iff |A| = |B|$ per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$, dalla (7) si ha $\lambda = \subseteq \cap \chi$, cioè la relazione λ è l’intersezione — come sottoinsiemi di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X))$ — delle due relazioni \subseteq e χ . Ora, sappiamo che \subseteq è relazione d’ordine, quindi in particolare è riflessiva e transitiva; analogamente, χ è (chiaramente) una relazione d’equivalenza, dunque in particolare è riflessiva e transitiva. Ne segue allora immediatamente che la loro intersezione $\subseteq \cap \chi = \lambda$ è a sua volta *riflessiva* e *transitiva*.

(a) Abbiamo già osservato che λ è riflessiva e transitiva; resta soltanto da dimostrare che sia anche *antisimmetrica*. Siano dunque $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tali che $A \lambda B$ e $B \lambda A$. Allora in particolare abbiamo $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, e quindi — poiché la relazione \subseteq è antisimmetrica! — è necessariamente $A = B$, q.e.d.

(b) Supponiamo che l’insieme X sia *finito*; ne segue che ogni $C \in \mathcal{P}(X)$ è a sua volta un insieme finito. Allora, per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$, se $A \lambda B$ abbiamo

$$A \lambda B \iff (A \subseteq B) \ \& \ (|A| = |B|) \iff A = B$$

perché A e B sono insiemi finiti. Dunque λ è la relazione identità in $\mathcal{P}(X)$, q.e.d.

(c) Supponiamo che l’insieme X sia *infinito*. Scegliendo un qualsiasi sottoinsieme *numerabile* $N \in \mathcal{P}(X)$ e un qualsiasi elemento $n_0 \in N$, e ponendo poi $N_+ := N \setminus \{n_0\}$, abbiamo ovviamente che N_+ è anch’esso numerabile — come lo è il sottoinsieme \mathbb{N}_+ di \mathbb{N} — e dunque $|N_+| = |N|$. Così abbiamo $N_+ \subseteq N$ e $|N_+| = |N|$, dunque $N_+ \lambda N$; ma d’altra parte $N \not\lambda N_+$ perché $N \not\subseteq N_+$. Dunque λ non è simmetrica, q.e.d.