Corso di Laurea Triennale in **Informatica** - a.a. 2012/13
programma analitico del corso di

MATEMATICA DISCRETA

(9 CFU)

prof. **Fabio Gavarini**

----- ------- ------------- ------- -----

INSIEMI, CORRISPONDENZE, RELAZIONI, OPERAZIONI

Insiemi: Insiemi: definizione (naturale, o "ingenua"), descrizioni possibili; appartenenza e non appartenenza di elementi. Sottoinsiemi, sovrainsiemi. Inclusione tra insiemi; inclusione stretta. L'uguaglianza tra insiemi come doppia inclusione. L'insieme vuoto. L'insieme delle parti di un insieme. Famiglie: definizione, comparazione con gli insiemi. Partizioni di un insieme.

Operazioni tra insiemi: intersezione, unione, differenza, complementare, differenza simmetrica. Proprietà notevoli: *(1)* associatività e commutatività di intersezione, unione e differenza simmetrica; *(2)* leggi di De Morgan. Elementi speciali per le operazioni tra insiemi. Prodotto cartesiano tra insiemi.

Corrispondenze: Corrispondenze tra insiemi: definizione, esempi. Corrispondenza vuota, corrispondenza totale; corrispondenza identica. Immagine - tramite una corrispondenza data - di un sottoinsieme del dominio; controimmagine - tramite una corrispondenza data - di un sottoinsieme del codominio. Corrispondenza inversa; composizione - o prodotto (operatorio) - di due corrispondenze: definizione, esempi. Proprietà notevoli di inversione e composizione: associatività, esistenza di "elementi neutri", ecc.

Funzioni: Funzioni (o "applicazioni"): definizione, esempi, controesempi. Caratterizzazione delle famiglie come funzioni. Restrizione di una funzione ad un sottoinsieme del dominio. Funzioni iniettive; funzioni suriettive; funzioni biiettive. Caratterizzazione della biiettività di una funzione tramite la corrispondenza inversa (deve essere a sua volta una funzione). Esempi e controesempi. Composizione di funzioni: descrizione e proprietà (in generale). Funzioni invertibili: definizione; caratterizzazione in termini intrinseci (biiettività) e in termini della corrispondenza inversa (dev'essere a sua volta una funzione). Funzioni caratteristiche in un insieme. Biiezione naturale tra l'insieme delle parti di un insieme A e l'insieme delle funzioni caratteristiche in A.

Relazioni: Relazioni (binarie) in un insieme; operazioni insiemistiche tra relazioni; composizione, inversa e potenze di relazioni. Proprietà notevoli per una relazione: riflessività, simmetricità, antisimmetricità, transitività. Chiusura riflessiva, chiusura simmetrica, chiusura transitiva di una relazione.

Relazioni di preordine; relazioni d'ordine (parziale). Esempi e controesempi.

Relazioni di equivalenza: definizione, esempi. La congruenza modulo n tra numeri interi è una equivalenza. La relazione in X associata ad una funzione f da X a Y è una equivalenza. Generalizzazione: la relazione in X controimmagine, per una funzione f da X a Y, di una relazione in Y, è riflessiva, risp. simmetrica, risp. transitiva, se tale è la relazione iniziale in Y.

Classi di equivalenza; rappresentante di una classe di equivalenza; insieme quoziente, proiezione canonica.
La biiezione naturale tra l'ínsieme delle equivalenze in X e l'ínsieme delle partizioni di X.

Decomposizione di funzioni. La decomposizione canonica di una funzione tramite l'insieme quoziente (modulo l'equivalenza associata alla funzione data) e l'immagine della funzione stessa. Esempi espliciti di decomposizione canonica di una funzione.

Insiemi con operazioni: Operazioni n-arie in un insieme. Gruppoidi. Proprietà speciali di operazioni binarie. Unicità di elemento neutro (se esiste) e di elemento inverso (se esiste) di un elemento dato.

Semigruppi, monoidi, gruppi. Il sottoinsieme degli elementi invertibili in un monoide è un gruppo (per la stessa operazione). Esempi e controesempi di gruppoidi, semigruppi, monoidi, gruppi; il monoide libero A^* su un insieme A (=*linguaggio sull'alfabeto* A) con l'operazione di giustapposizione. Permutazioni di un insieme. L'insieme delle permutazioni di un insieme è un gruppo per la composizione.

Insiemi con due operazioni (binarie); casi speciali (semianelli, anelli, campi); esempi e controesempi. L'insieme delle parti (di un insieme) è un anello commutativo unitario - ma non un campo - per la differenza simmetrica e l'intersezione. Il campo con due elementi.

Bibliografia: [Ca] Capitolo I, paragrafi 1, 2, 3 e 4 - [G-P] files *Insiemi* , *Funzioni e cardinalità* , *Relazioni 1* , *Gruppi, anelli, campi* - [L-L] Chapters 1, 2 e 3; Appendix B - [PC] Capitolo 1, paragrafi 1, 2 e 3; Capitolo 4, paragrafo 1; Capitolo 5, paragrafi 1 e 2

Videolezioni: *Insiemi* , *Corrispondenze* , *Funzioni 1* , *Funzioni 2* , *Funzioni caratteristiche* , *Relazioni* , *Equivalenze 1* , *Equivalenze 2* , *Operazioni 1* , *Operazioni 2*

NUMERI NATURALI, CALCOLO COMBINATORIO

Numeri naturali e Principio di Induzione: Il Sistema dei Numeri Naturali (=S.N.N.): definizione tramite assiomi di Peano. Il Principio di Induzione Debole (=Pr.I.D.). Il problema della esistenza e unicità di un S.N.N. (cenni). Relazione d'ordine (totale), somma e prodotto tra numeri naturali. L'insieme dei numeri naturali è un semianello (per somma e prodotto) in cui l'ordine è compatibile con le due operazioni.

Il Principio di Induzione Forte (=Pr.I.F.), il Principio del Minimo (=Pr.M.); l'equivalenza tra Pr.I.D., Pr.I.F. e Pr. M. (cenni). Dimostrazioni per induzione: idea, strategia operativa (base, passo induttivo).

Divisione euclidea e scrittura posizionale: Divisione con resto tra numeri naturali; dimostrazione per induzione in tre modi diversi: col Pr.I.D., col Pr.I.F. e col Pr.M.

Numerazione in base arbitraria: esistenza e unicità della scrittura posizionale (di un numero naturale) in base b (>1) arbitraria. Procedura operativa per il calcolo della scrittura posizionale.

Elementi di calcolo combinatorio: Calcolo del numero di funzioni da un insieme finito ad un altro ("disposizioni" - o "prelievi", o "campionamenti" – "con ripetizione"). Calcolo del numero di funzioni iniettive da un insieme finito ad un altro ("disposizioni" - o "prelievi", o "campionamenti" - "senza ripetizione"). Calcolo del numero di permutazioni di un insieme finito in sé stesso; la funzione *fattoriale* di n. Calcolo del numero dei sottoinsiemi con k elementi in un insieme con n elementi ("combinazioni di k elementi scelti tra n"): coefficienti binomiali. Proprietà notevoli dei coefficienti binomiali; il triangolo di Pascal-Tartaglia. Calcolo del numero di partizioni di un insieme finito in sottoinsiemi con numero di elementi assegnato: coefficienti multinomiali. La formula di Newton per lo sviluppo delle potenze di un binomio (in termini di *coefficienti binomiali*); la formula per lo sviluppo delle potenze di un multinomio (in termini di *coefficienti multinomiali*).

Bibliografia: [AaVv] file Numeri naturali *(D'Andrea)* - [Ca] Capitolo I, paragrafi 1 e 5 ; Capitolo II, paragrafo 2 - [G-P] files Induzione , Aritmetica sugli interi, etc. (complementi), paragrafo 1 - [L-L] Chapter 1, section 8; Chapter 5, sections 1 to 5; Chapter 6, sections 1 to 3; Chapter 11, section 3 - [PC] Capitolo 1, paragrafi 4 e 6; Capitolo 2, paragrafo 10

Videolezioni: *Naturali* , *Induzione* , *Divisione* , *Numerazione*

CARDINALITÀ, NUMERI CARDINALI

Equipotenza tra insiemi; l'equipotenza è riflessiva, simmetrica, transitiva. Cardinalità di un insieme, numeri cardinali. Insiemi finiti, infiniti numerabili o infiniti non numerabili. Relazione d'ordine tra numeri cardinali; Teorema di Schroeder-Bernstein (senza dimostrazione).

Caratterizzazione degli insiemi infiniti: per un insieme X le seguenti proprietà sono equivalenti: *(1)* X è infinito, *(2)* esiste una funzione iniettiva dall'insieme dei numeri naturali ad X, *(3)* esiste un sottoinsieme proprio di X che è equipotente ad X stesso.

1º Teorema di Cantor: L'unione di una famiglia finita (non vuota) o numerabile di insiemi numerabili è numerabile - Applicazioni: **Z**, **Q** e **N×N** sono numerabili.

2º Teorema di Cantor: La cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme è strettamente maggiore della cardinalità dell'insieme stesso.

I numeri cardinali infiniti superiori $\aleph_n$ (per ogni n in **N**). La cardinalità del continuo: $|\mathbf{R}| = |\mathscr{P}(\mathbf{N})|$ (con cenni di dimostrazione). L'ipotesi del continuo generalizzata (cenni).

Bibliografia: [AaVv] file Cardinalità *(D'Andrea)* - [Ca] Capitolo I, paragrafo 6 - [G-P] file Funzioni e cardinalità, paragrafo 5 - [L-L] Chapter 3, section 7 - [PC] Capitolo 1, paragrafo 5

Videolezioni: *Cardinalità 1* , *Cardinalità 2*

NUMERI INTERI, CONGRUENZE, ARITMETICA MODULARE

Numeri interi: Richiami sui numeri interi: operazioni, ordine, valore assoluto. Costruzione degli interi a partire dai naturali, come "naturali + i negativi": elementi, operazioni, ordine, valore assoluto (cenni).

Fattorizzazione: Il problema generale della fattorizzazione in un monoide: esempi varî di esistenza, controesempi all'unicità. Divisibilità. Elementi invertibili, elementi associati. Elementi riducibili, elementi irriducibili, elementi primi; ogni primo è irriducibile. Fattorizzazioni banali, fattorizzazioni equivalenti.

Teorema Fondamentale dell'Aritmetica: esistenza e unicità di una fattorizzazione in irriducibili per interi non nulli e non invertibili *(dimostrazione soltanto dell'esistenza).*

Massimo comun divisore (=*MCD*) e minimo comun multiplo (=*mcm*). Elementi coprimi (=primi tra loro).

Divisione euclidea tra interi (e conseguenze), equazioni diofantee: Divisione con resto tra numeri interi: esistenza e unicità di quoziente e resto (positivo). Esistenza del *MCD* in **Z**, e identità di Bézout per esso: calcolo con l'algoritmo euclideo delle divisioni successive. Tra i numeri interi, ogni irriducibile è primo.

Teorema Fondamentale dell'Aritmetica: esistenza e unicità di una fattorizzazione in irriducibili per interi non nulli e non invertibili *(dimostrazione soltanto dell'unicità).*

Forma esplicita di $MCD(a,b)$ e di $mcm(a,b)$ in termini di fattorizzazioni di a e di b ; la relazione $MCD(a,b)\, mcm(a,b) = a\, b$; calcolo di $mcm(a,b)$ tramite il calcolo di $MCD(a,b)$.

Teorema di Euclide: Esistono infiniti interi irriducibili (a due a due non associati).

Equazioni diofantee: definizione, criterio di esistenza di soluzioni, algoritmo per il calcolo di una soluzione.

Congruenze, aritmetica modulare: Congruenze in **Z** (modulo n): ogni congruenza è una equivalenza. Descrizione delle classi di congruenza e dell'insieme quoziente $\mathbf{Z}_n$. Aritmetica modulare: compatibilità di somma e prodotto con ogni congruenza modulo n ; somma e prodotto in $\mathbf{Z}_n$.

Teorema: $\mathbf{Z}_n$ è un anello commutativo unitario *(senza dimostrazione).*

Proposizione: $\mathbf{Z}_n$ è un dominio $\Leftrightarrow$ n è irriducibile (=primo) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{Z}_n$ è un campo.

Criteri di divisibilità in **Z**: strategia generale, esempi specifici.

Equazioni congruenziali e applicazioni: Equazioni congruenziali in **Z**: definizione, connessione con equazioni in $\mathbf{Z}_n$, connessione con equazioni diofantee in **Z** ; criterio di esistenza di soluzioni, algoritmo per il calcolo di una soluzione, insieme completo di soluzioni. Elementi invertibili in $\mathbf{Z}_n$; criterio di invertibilità, calcolo dell'inverso mediante risoluzione di una equazione congruenziale. Il gruppo moltiplicativo $U(\mathbf{Z}_n)$ degli elementi invertibili di $\mathbf{Z}_n$.

La funzione di Eulero: definizione, formula esplicita. Ripetitività delle potenze in $\mathbf{Z}_n$: generalità, il *Piccolo Teorema di Fermat*, il *Teorema di Eulero* (senza dimostrazione); calcolo di potenze in $\mathbf{Z}_n$.

Sistemi di equazioni congruenziali: discussione, risoluzione - tramite il *Teorema Cinese del Resto* (senza dimostrazione) o tramite sostituzioni successive. Applicazione: il *metodo crittografico RSA*.

Bibliografia: [AaVv] files Numeri interi *(D'Andrea)*, paragrafo 4 , Congruenze, aritmetica modulare*(D'Andrea)*, paragrafi 1 e 2 - [Ca] Capitolo II, paragrafi da 1 a 6 - [G-P] files Aritmetica sugli interi, congruenze, Teorema Cinese del Resto , Aritmetica sugli interi, etc. (complementi) - [L-L] Chapter 11, sections 1 to 9 - [PC] Capitolo 2, paragrafi da 1, 2, 3, 6, 7, 8 e 9

RETICOLI, ALGEBRE DI BOOLE, FUNZIONI BOOLEANE

Insiemi ordinati: Relazioni d'ordine: ordin(ament)i totali, ordin(ament)i buoni. Relazione di copertura e diagramma di Hasse. Sottoinsiemi ordinati, intervalli, ordine prodotto, ordine lessicografico. *Principio di Dualità* per insiemi ordinati.

Elementi minimali (risp. massimali), minimo $min(E')$ - risp. massimo $max(E')$ - per un sottoinsieme E' in un insieme ordinato E; unicità di $min(E')$ - risp. di $max(E')$ - se esiste. Minoranti - risp. maggioranti - estremo inferiore $inf(E')$ - risp. estremo superiore $sup(E')$ - per un sottoinsieme E' in un insieme ordinato E; unicità di $inf(E')$ - risp. di $sup(E')$ - se esiste.

Reticoli: Reticoli: definizione come insiemi ordinati e definizione come insiemi con due operazioni binarie. Equivalenza delle due definizioni di reticolo *(idea della dimostrazione)*. Esempi di reticoli.

Principio di Dualità per reticoli. *Proposizione:* Ogni reticolo finito è limitato. Complementi in un reticolo; reticoli complementati. Reticoli distributivi. *Proposizione:* In un reticolo distributivo, il complemento - se esiste - è unico, e valgono le *Leggi di De Morgan* per il complemento di $inf(x,y)$ e di $sup(x,y)$.

Elementi $\vee$-riducibili o $\vee$-irriducibili; atomi. *Proposizione:* In un reticolo finito, ogni elemento ha una $\vee$-fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$-irriducibili.

Teorema di $\vee$-Fattorizzazione Unica (in $\vee$-irriducibili) per reticoli finiti distributivi.

Caratterizzazione degli elementi $\vee$-irriducibili in un reticolo finito. *Lemma:* Ogni atomo è irriducibile. *Proposizione:* In un reticolo finito unicamente complementato, ogni elemento $\vee$-irriducibile è un atomo.

Teorema di $\vee$-Fattorizzazione Unica (in atomi) per reticoli finiti distributivi complementati (=alg. di Boole).

Isomorfismi tra reticoli, reticoli isomorfi; proprietà degli isomorfismi. *Esempio:* $\boldsymbol{D}_r$ è isomorfo a $\boldsymbol{D}_s$ se e soltanto se r ed s hanno fattorizzazioni in primi distinti che coinvolgono gli stessi esponenti.

Sottoreticoli di un reticolo. *Teorema:* Un reticolo è distributivo se e soltanto se non ha sottoreticoli isomorfi a $\boldsymbol{N}_5$ o a $\boldsymbol{M}_5$ *(senza dimostrazione)*.

Algebre di Boole: Algebre di Boole: definizione come reticoli distributivi (limitati) complementati, definizione come insiemi con due operazioni particolari. Equivalenza delle due definizioni *(cenni di dimostrazione)*. Il *Principio di Dualità* per algebre di Boole. Anelli booleani; proprietà particolari in un anello booleano: il prodotto è commutativo, ogni elemento è uguale al suo opposto.

Teorema di Equivalenza (Stone): Le nozioni di algebra di Boole e di anello booleano unitario sono equivalenti *(senza dimostrazione, soltanto la definizione delle corrispondenze)*.

Controsempi: gli insiemi totalmente ordinati con più di due elementi non sono algebre di Boole. *Esempi di algebre di Boole:* l'insieme delle parti $P(X)$; le funzioni a valori in un'algebra di Boole; prodotti di algebre di Boole; i prodotti $\{0,1\}^n$.

Isomorfismi tra algebre di Boole, algebre di Boole isomorfe; proprietà degli isomorfismi. *Esempio:* la biiezione canonica da $P(X)$ a $\{0,1\}^X$ - per ogni insieme X - è un isomorfismo di algebre di Boole. *Lemma:* Una biiezione tra algebre di Boole è un isomorfismo di algebre di Boole se e soltanto è un isomorfismo di reticoli *(senza dimostrazione)*.

Teorema (Stone - caso finito): Ogni algebra di Boole finita è isomorfa all'insieme delle parti dell'insieme dei suoi atomi. *Corollario:* Ogni algebra di Boole finita è isomorfa all'insieme delle funzioni caratteristiche dell'insieme dei suoi atomi. *Esempi* e *controesempi* per il Teorema di Stone. Sottoalgebre di Boole; esempi e controesempi. *Teorema (Stone - caso generale):* Ogni algebra di Boole è isomorfa ad una sottoalgebra di Boole dell'insieme delle parti di un opportuno insieme *(senza dimostrazione)*.

Funzioni booleane, polinomi booleani: L'insieme $F_n(B)$ delle funzioni booleane in n variabili su un'algebra di Boole B; struttura di algebra di Boole. L'insieme P_n dei polinomi booleani in n variabili; funzioni booleane indotte da un polinomio booleano. L'insieme $P_n(B)$ delle funzioni polinomiali su B indotte da un polinomio booleano. *Lemma:* $P_n(B)$ è sottoalgebra di Boole di $F_n(B)$.

Equivalenza tra polinomi booleani (quando inducono la stessa funzione booleana su $\underline{2}:=\{0,1\}$).

Teorema: Due polinomi booleani inducono la stessa funzione booleana su qualsiasi algebra di Boole se e soltanto se sono equivalenti.

Prodotti, prodotti fondamentali (in P_n); somme di prodotti (ridondanti, non ridondanti, complete); passaggio da un oggetto (prodotto o somma) non "buono" (fondamentale, o irridondante, o completo) ad uno "buono" equivalente. Forma normale disgiuntiva di un polinomio booleano: esistenza e unicità. Dualizzazione: la forma normale congiuntiva di un polinomio booleano. Metodi operativi per il calcolo della F.N.D. di un polinomio booleano: *(1)* tramite "tavole di verità", *(2)* tramite manipolazioni successive. *Corollario (del primo metodo):* $F_n(\underline{2}) = P_n(\underline{2})$, cioè tutte le funzioni booleani sull'algebra di Boole $\underline{2} := \{0,1\}$ sono funzioni polinomiali.

Relazione di "maggior semplicità" tra polinomi booleani equivalenti che siano somme di prodotti. Definizione di *forma minimale* di un polinomio booleano; esistenza (e non unicità) di forme minimali. La relazione di "implicazione" tra polinomi booleani. Il legame tra la relazione di *implicazione* e quella di *equivalenza*. Gli implicanti primi di un polinomio booleano.

Proposizione: Ogni somma di prodotti è equivalente alla somma di tutti i suoi implicanti primi.

Somme di prodotti irridondanti. *Proposizione:* Ogni forma minimale di un polinomio booleano f è somma irridondante di implicanti primi di f. Il *consenso* di due prodotti in P_n . Il *Metodo del Consenso*: algoritmo di calcolo della somma di tutti gli implicanti primi di un polinomio booleano in n variabili *(senza dimostrazione)*. Calcolo di una forma minimale tramite il *Metodo del Consenso*.

Bibliografia: [Ca] Capitolo I, paragrafo 3(B) - [G-P] files Relazioni - 2 , Reticoli , Algebre di Boole , Funzioni booleane , Forme minimali di una funzione polinomiale - [L-L] Chapter 14, sections 1 to 5 and 7 to 11; Chapter 15, sections 1 to 9

Videolezioni: *Insiemi ordinati* , *Reticoli 1* , *Reticoli 2* , *Reticoli 3* , *Algebre di Boole 1* , *Algebre di Boole 2*

FUNZIONI RICORSIVE, EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE

Funzioni ricorsive: Funzioni (o "successioni") ricorsive. Dati iniziali ed equazione ricorsiva - o "equazione alle differenze finite", o "equazione caratteristica" - e grado (o "ordine") associati ad una funzione ricorsiva.

Teorema di Ricorsione: Esistenza e unicità della funzione che soddisfa una data equazione ricorsiva, e ha dati iniziali assegnati.

Casi particolari di funzioni ricorsive: lineari, lineari omogenee, lineari a coefficienti costanti.

Proposizione: L'insieme S delle successioni che sono soluzioni di un'equazione ricorsiva lineare omogenea di ordine k è chiuso per la somma e per il prodotto con uno scalare; inoltre, esistono k successioni $\underline{a}_1, \dots , \underline{a}_k$ in S tali che ogni successione in S si possa scrivere in modo unico come combinazione lineare delle successioni $\underline{a}_1, \dots , \underline{a}_k$ - in breve: " S è sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le successioni, e ha dimensione k " *(cenni di dimostrazione)*.

Strategia di calcolo di una funzione ricorsiva lineare omogenea: ricerca di una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione ricorsiva associata, e successiva imposizione delle condizioni iniziali.

Equazioni ricorsive lineari omogenee a coefficienti costanti: Metodo di calcolo esplicito per funzioni ricorsive lineari omogenee a coefficienti costanti omogenee: *(1)* il caso di grado 1; *(2)* il caso di grado 2, con due radici reali distinte; *(3)* il caso di grado 2, con una sola radice reale (doppia).

Bibliografia: [G-P] file Equazioni alle differenze finite (cenni) - [L-L] Chapter 3, section 6; Chapter 6, sections 6, 7 and 8

Videolezioni: *Funzioni ricorsive 1* , *Funzioni ricorsive 2* , *Funzioni ricorsive 3.1*

(MULTI)GRAFI, (MULTI)DIGRAFI

Multigrafi e multidigrafi: Multidigrafi, multigrafi: definizione, descrizione. Il multigrafo soggiacente ad un multidigrafo. Sottomultigrafi, sottomultidigrafi: definizione, descrizione, esempi.

Grado entrante, grado uscente, grado (totale) di un vertice in un multidigrafo. Grado di un vertice in un multigrafo. *Proprietà:* Il grado (totale) di un vertice in un multidigrafo e il grado dello stesso vertice nel multigrafo soggiacente sono uguali. Grafi (semplici) regolari; grafi (semplici) completi; ogni grafo (semplice) completo con n vertici è regolare di grado n -1 .

Teorema ("Lemma delle Strette di Mano"): *(1)* In ogni multigrafo finito, la somma dei gradi di tutti i vertici è uguale al doppio del numero degli spigoli del multigrafo.

(2) In ogni multidigrafo finito, la somma dei gradi entranti di tutti i vertici e la somma dei gradi uscenti di tutti i vertici sono uguali al numero degli archi del multidigrafo.

La matrice di adiacenza (di un multidigrafo o di un multigrafo): definizione, esempi. Ricostruzione di un multidigrafo, o di un multigrafo, dalla sua matrice di adiacenza.

Unione di multidigrafi, o di multigrafi; la matrice di adiacenza di una unione è in forma "a blocchi".

Multidigrafi bipartiti, multigrafi bipartiti, e loro matrici di adiacenza; digrafi bipartiti e corrispondenze; digrafi funzionali e funzioni.

Cammini, circuiti, connessione in multigrafi e in multidigrafi. Componenti connesse, ponti in un multigrafo.

Proposizione: Ogni multigrafo finito è l'unione delle sue componenti connesse.

Multi(di)grafi euleriani: Cammini euleriani in un multigrafo o multidigrafo; multigrafi e multidigrafi euleriani. *Teorema* di caratterizzazione dei multigrafi e dei multidigrafi euleriani.

L'*Algoritmo di Fleury* per il calcolo di un cammino euleriano (se esiste) in un multigrafo o in un multidigrafo.

Alberi: Alberi (non orientati), foreste: definizione ed esempi. Vertici pendenti (o "foglie") in un albero, o in una foresta.

Teorema (caratterizzazione degli alberi): Per un grafo G le seguenti proprietà sono equivalenti:

(a) G è un albero;

(b) G è aciclico, ma se si aggiunge un qualsiasi nuovo spigolo si ottiene un grafo ciclico;

(c) per ogni scelta di vertici u e v in G esiste uno ed un solo percorso da u a v in G;

(d) G è connesso, ma se si toglie un qualsiasi spigolo si ottiene un sottografo sconnesso (in altre parole, ogni spigolo in G è un ponte).

Teorema (caratterizzazione degli alberi finiti): Per un grafo finito $G:=(V,E)$ con $|V|=n$ vertici, le seguenti proprietà sono equivalenti: *(a)* G è un albero; *(b)* G è aciclico e $|E|=n-1$ $(=|V|-1)$; *(c)* G è connesso e $|E|=n-1$ $(=|V|-1)$.

Proposizione: Ogni albero finito con almeno due vertici ha almeno due vertici pendenti.

Albero generatore di un multigrafo. Esistenza di un albero generatore - e algoritmi per calcolarne uno - in un multigrafo connesso.

Bibliografia: [L-L] Chapter 8, sections 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 and 11; Chapter 9, sections 1, 2, 3 and 5 - [Qua] Breve Introduzione alla Teoria dei Grafi, Capitoli 1, 2, 4 e 6

TESTI (libri, dispense, videolezioni, ecc.) consigliati:

[AaVv] - Autori Varî, *Materiale vario disponibile in rete* (per gentile concessione degli autori) -
- alla pagina http://www.mat.uniroma2.it/~gavarini/page-web_files/mat-didat.html#Mat-Dis_altro-mat

[Ca] - G. Campanella, *Appunti di Algebra 1* (per gentile concessione dell'autore) -
- alla pagina http://www.mat.uniroma2.it/~gavarini/page-web_files/mat-didat_data/dispense-ecc/Algebra_1_-_dispense_di_Campanella.rar

[Ga] - F. Gavarini, *Videolezioni varie* -
- alla pagina http://didattica.uniroma2.it/files/index/insegnamento/144372

[G-P] - L. Geatti, G. Pareschi, *Appunti varî* (per gentile concessione degli autori) -
- alla pagina http://www.mat.uniroma2.it/~gavarini/page-web_files/mat-didat_data/Algebra-Logica_(ING-INF)/Pagina_Web_Algebra-Logica_2012-13/AL_2012-13.html#app_alg-log

[L-L] - S. Lipschutz, M. Lipson, *Discrete Mathematics*, 3rd Edition, Schaum's Outlines, McGraw-Hill, 2007

[PC] - G. M. Piacentini Cattaneo, *Algebra - un approccio algoritmico*, ed. Decibel/Zanichelli, Padova, 1996

[Qua] - G. Quattrocchi, *Breve Introduzione alla Teoria dei Grafi* (per gentile concessione dell'autore) -
- alla pagina http://www.mat.uniroma2.it/~gavarini/page-web_files/mat-didat_data/dispense-ecc/Quattrocchi_G._-_Breve_Introduzione_alla_Teoria_dei_Grafi.pdf