GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2011/2012

prof. Fabio GAVARINI

Esonero del 31 Gennaio 2012

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] Si consideri la matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Calcolare gli autovalori di A.

(b) Calcolare — descrivendoli esplicitamente — gli autospazi di A.

(c) Determinare se la matrice A sia diagonalizzabile. In caso negativo, si spieghi perché. In caso affermativo, calcolare esplicitamente una base diagonalizzante, una matrice diagonalizzante e la matrice diagonale simile ad A che si ottiene tramite la matrice diagonalizzante trovata.

[2] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si consideri la funzione $g_S : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $g_S\big(\underline{x}\,,\,\underline{y}\big) := \underline{x}^T \cdot S \cdot \underline{y}$ $\;(\forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^4)$, dove S è la matrice

$$S := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Dimostrare che g_S è un prodotto scalare definito positivo in V.

(b) Calcolare — descrivendolo esplicitamente — il sottospazio $W^\perp$ ortogonale al sottospazio $W := Span(w_1, w_2)$ generato dai due vettori

$$w_1 := (1\,,0\,,3\,,-1) \quad , \qquad w_2 := (0\,,2\,,-1\,,1) \quad .$$

(continua...)

[3] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare canonico — da indicare con $\langle\ ,\ \rangle$ — si considerino i tre vettori

$$w_1 := (1\,,\,1\,,\,0\,,\,0) \quad , \qquad w_2 := (0\,,\,1\,,\,1\,,\,0), \qquad w_3 := (0\,,\,2\,,\,3\,,\,4) \quad .$$

e il sottospazio $W := Span(w_1, w_2, w_3)$ da essi generato.

(a) Dimostrare che l'insieme $B := \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di W.

(b) Determinare una base ortonormale $U := \{u_1, u_2, u_3\}$ di W tale che $Span(u_1) = Span(w_1)$ e $Span(u_1, u_2) = Span(w_1, w_2)$.

(c) Dimostrare che l'insieme

$$L := \big\{\, \ell_1 := (1\,,2\,,3\,,4)\,,\ \ell_2 := (1\,,-2\,,1\,,2)\,,\ \ell_3 := (0\,,1\,,0\,,-5)\,,\ \ell_4 := (1\,,2\,,3\,,-6) \,\big\}$$

è una base di V.

(d) La base L è ortogonale? È ortonormale?

(e) Calcolare esplicitamente la matrice di Gram $S_{\langle\ ,\ \rangle, L} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$ associata al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ rispetto alla base L.