GEOMETRIA I modulo
CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2009/2010

prof. Fabio GAVARINI

Esonero del 27 Gennaio 2010

Svolgimento completo

········· $*$ ·········

N.B.: lo svolgimento qui presentato è chilometrico... Questo non vuol dire *che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si è colta l'occasione per spiegare — anche in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con dovizia di particolari tutti gli aspetti della teoria toccati in maggiore o minore misura dal testo in esame.*

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico, si consideri il sottospazio $W := \mathit{Span}(w_1, w_2, w_3)$ generato dai tre vettori

$$w_1 := (1,1,0,0)\,,\ \ w_2 := (0,1,1,0)\,,\ \ w_3 := (0,2,3,4) \ \in\ \mathbb{R}^4 \quad .$$

(a) Determinare una base ortonormale di W.

(b) Determinare un vettore non nullo $v \in V \setminus \{0_V\}$ ortogonale al sottospazio W.

<u>*Soluzione*</u>: *(a)* Per teoria generale, sappiamo che possiamo ottenere una base ortonormale di W con un procedimento in due passi, come segue:

— *(1)* a partire da una base qualsiasi B di W, costruiamo una base ortogonale B' (di W) tramite il procedimento di *ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*;

— *(2)* a partire dalla base ortogonale B', ne otteniamo una ortonormale B'' tramite il procedimento di *ortonormalizzazione*, cioè moltiplicando ogni vettore di B' per l'inverso della sua norma.

Cominciamo quindi fissando una base B di W. A tal fine, ci basta osservare che l'insieme $B := \{w_1\,, w_2\,, w_3\}$ dei generatori di W è una base, perché tali vettori sono tra loro linearmente indipendenti. Per verificarlo, possiamo procedere in questo modo. Formiamo la matrice

$$A \ := \ \begin{pmatrix} w_3 \\ \text{—} \\ w_2 \\ \text{—} \\ w_1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha per righe i vettori w_3, w_2 e w_1 (in quest'ordine!). Scrivendo $A = \left(A^1 \,\middle|\, A^2 \,\middle|\, A^3 \,\middle|\, A^4 \right)$ per denotare la divisione di A in colonne, consideriamo poi la matrice

$$A' \ := \ \left(A^4 \,\middle|\, A^3 \,\middle|\, A^2 \,\middle|\, A^1 \right) \ = \ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuta da A invertendo l'ordine delle colonne. Chiaramente allora, pensando al rango di una matrice come "rango-colonne", si ha $rg(A') = rg(A)$, per costruzione. Ma la matrice A' è una matrice *a scala* (superiore), con tre pivot — precisamente 4, 1 e 2, nelle colonne 1, 2 e 3 — quindi il suo rango è uguale al numero di pivot, dunque a 3. Pertanto abbiamo che $rg(A) = rg(A') = 3$, e questo significa che i tre vettori w_1, w_2 e w_3 sono tra loro linearmente indipendenti, q.e.d.

<u>N.B.</u>: ovviamente, si poteva procedere anche in altro modo. Ad esempio, con i vettori w_1, w_2 e w_3 si può anche formare la matrice

$$C := \left(w_1^T \,\middle|\, w_2^T \,\middle|\, w_3^T \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha i vettori w_1, w_2 e w_3 (in quest'ordine!) come *colonne*. Di nuovo, i tre vettori sono tra loro linearmente indipendenti se e soltanto se la matrice C ha rango 3. In tal caso, possiamo osservare che — per il *Teorema degli Orlati* — si avrà $rg(C) = 3$ se e soltanto se esiste un minore di ordine 3 della matrice C diverso da zero (cioè esiste una sottomatrice quadrata di ordine 3 in C con determinante diverso da zero). Ora, se consideriamo la sottomatrice (quadrata di ordine 3) di C

$$C_{2,3,4}^{1,2,3} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

formata dai coefficienti di C che stanno nelle colonne 1, 2, 3 e nelle righe 2, 3, 4 abbiamo subito (ad esempio, perché $C_{2,3,4}^{1,2,3}$ è una matrice triangolare superiore, quindi il suo determinante è uguale al prodotto dei coefficienti sulla diagonale!) che $det\left(C_{2,3,4}^{1,2,3}\right) = 4 \neq 0$. Si conclude allora che $rg(C) = 3$, e quindi i vettori w_1, w_2 e w_3 sono tra loro linearmente indipendenti, q.e.d.

Possiamo dunque procedere con il passo *(1)*. Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt consiste in questo: a partire dalla base $B := \{w_1, w_2, w_3\}$ di W, si ottiene una base $B' := \{u_1, u_2, u_3\}$ di W che è *ortogonale*, tramite le seguenti formule (ricorsive):

$$u_1 := w_1 \quad , \qquad u_2 := w_2 - \frac{\langle w_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}\, u_1 \quad , \qquad u_3 := w_3 - \frac{\langle w_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}\, u_1 - \frac{\langle w_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle}\, u_2$$

Procedendo a calcolare, si ottiene

$$\begin{gathered} u_1 = (1,1,0,0) \ , \quad \langle u_1, u_1 \rangle = \big\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0) \big\rangle = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 2 \\ \langle w_2, u_1 \rangle = \big\langle (0,1,1,0), (1,1,0,0) \big\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1 \\ u_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}\, u_1 = (0,1,1,0) - 1/2\,(1,1,0,0) = \big(-1/2\,, 1/2\,, 1\,, 0 \big) \\ \langle u_2, u_2 \rangle = \big\langle \big(-1/2\,, 1/2\,, 1\,, 0 \big), \big(-1/2\,, 1/2\,, 1\,, 0 \big) \big\rangle = \big(-1/2 \big)^2 + \big(1/2 \big)^2 + 1^2 + 0^2 = 3/2 \\ \langle w_3, u_2 \rangle = \big\langle (0,2,3,4)\,, \big(-1/2\,, 1/2\,, 1\,, 0 \big) \big\rangle = 0 \cdot \big(-1/2 \big) + 2 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 4 \\ \langle w_3, u_1 \rangle = \big\langle (0,2,3,4), (1,1,0,0) \big\rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 2 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} u_3 &:= w_3 - \frac{\langle w_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}\, u_1 - \frac{\langle w_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle}\, u_2 = \\ &= (0,2,3,4) - 2/2\,(1,1,0,0) - 4\big/(3/2)\, \big(-1/2\,, 1/2\,, 1\,, 0 \big) = \big(1/3\,, -1/3\,, 1/3\,, 4 \big) \end{aligned}$$

così la base ortogonale che otteniamo con il passo *(1)* è

$$B' := \{u_1, u_2, u_3\} = \big\{(1,1,0,0), \big(-1/2, 1/2, 1, 0\big), \big(1/3, -1/3, 1/3, 4\big)\big\}$$

Passiamo ora al passo *(2)*. Esso consiste nel sostituire alla base ortogonale $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ l'insieme $B'' = \{v_1, v_2, v_3\}$ definito da $v_i := \|u_i\|^{-1} u_i$ per ogni $i = 1,2,3$. Poiché B' è una base di W, ne seguirà automaticamente che anche B'' sarà una base di W; inoltre, essendo B' ortogonale, lo sarà anche B''; infine, i vettori di B'' hanno norma 1, perché le definizioni e le proprietà della norma danno $\|v_i\| = \big\|\|u_i\|^{-1} u_i\big\| = \|u_i\|^{-1}\|u_i\| = 1$ per ogni $i = 1,2,3$. Perciò, in una parola, B'' sarà una base *ortonormale* di W, come richiesto.

Passando ai calcoli (e sfruttando quelli già fatti...), si trova

$$\|u_1\| := \langle u_1, u_1\rangle^{1/2} = \sqrt{2}\ , \qquad \|u_2\| := \langle u_2, u_2\rangle^{1/2} = \sqrt{3/2}$$

$$\|u_3\| := \langle u_3, u_3\rangle^{1/2} = \big\langle \big(1/3, -1/3, 1/3, 4\big), \big(1/3, -1/3, 1/3, 4\big)\big\rangle =$$

$$= \sqrt{\big(1/3\big)^2 + \big(-1/3\big)^2 + \big(1/3\big)^2 + 4^2} = \sqrt{49/3} = 7\big/\sqrt{3}$$

e quindi la base ortonormale $B'' := \{v_1, v_2, v_3\}$ è data da

$$v_1 := \|u_1\|^{-1} u_1 = 1\big/\sqrt{2}\,(1,1,0,0) = \big(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0\big)$$

$$v_2 := \|u_2\|^{-1} u_2 = \sqrt{2/3}\,\big(-1/2, 1/2, 1, 0\big) = \big(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, \sqrt{2/3}, 0\big)$$

$$v_3 := \|u_3\|^{-1} u_3 = \sqrt{3}\big/7\,\big(1/3, -1/3, 1/3, 4\big) = \big(1/7\sqrt{3}\,,\, -1/7\sqrt{3}\,,\, 1/7\sqrt{3}\,,\, 4\sqrt{3}/7\big)$$

(b) Per determinare un vettore non nullo $v \in V \setminus \{0_V\}$ ortogonale al sottospazio W, possiamo seguire due metodi, ovviamente equivalenti.

<u>*1º metodo*</u>*:* Estendiamo l'insieme $B := \{w_1, w_2, w_3\}$ dei generatori di W, che è una base di W stesso, ad una base di tutto lo spazio $V := \mathbb{R}^4$, aggiungendo il vettore $w_4 := \underline{e}_4 = (0,0,0,1)$. In altre parole, consideriamo l'insieme $B_V := \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. È immediato verificare che B_V è *una base di* $V := \mathbb{R}^4$, in quanto i suoi vettori sono tra loro linearmente indipendenti. Infatti, procedendo come in *(a)* possiamo, ad esempio, considerare la matrice

$$C_V := \big(C \,\big|\, w_4^T\big) = \Big(w_1^T \,\Big|\, w_2^T \,\Big|\, w_3^T \,\Big|\, w_4^T\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha i vettori w_1, w_2, w_3 e w_4 — in quest'ordine — come *colonne*; tali vettori sono linearmente indipendenti se e soltanto se la matrice C_V ha rango 4, e quindi (siccome si tratta di una matrice *quadrata*) se e soltanto se tale matrice ha determinante diverso da zero. Il calcolo diretto ci dà

$$det\big(C_V\big) = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 1 \neq 0$$

dove abbiamo effettuato lo *sviluppo di Laplace lungo la prima riga* — nella seconda uguaglianza, per calcolare il determinante 4×4 — poi lo *sviluppo di Laplace lungo la terza (e ultima) colonna* —

nella terza uguaglianza, per calcolare il determinante 3×3 — e infine — nella quarta uguaglianza — la *formula esplicita* per il calcolo del determinante 2×2. In conclusione abbiamo $det\big(C_V\big) \neq 0$, dunque $rg\big(C_V\big) = 4$, e così w_1, w_2, w_3 e w_4 sono linearmente indipendenti, q.e.d.

Ora, sapendo che $B_V := \{w_1\,, w_2\,, w_3\,, w_4\}$ è una base di $V := \mathbb{R}^4$, possiamo applicare ad essa il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale. Osserviamo subito che tale base sarà del tipo $B'_V = B' \cup \{u_4\} = \{u_1\,, u_2\,, u_3\,, u_4\}$, dove $B' = \{u_1\,, u_2\,, u_3\}$ è la base ortogonale di W calcolata in precedenza nel trattare il punto *(a)*. Inoltre, per costruzione — cioè essenzialmente per il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt — il vettore u_4 sarà ortogonale ai tre vettori u_1, u_2 e u_3: siccome questi ultimi formano una base di W (sempre per costruzione!), ne segue che u_4 *è ortogonale a tutto il sottospazio* W; infine, essendo elemento di una base il vettore u_4 sarà certamente *non nullo*. Quindi, in conclusione, il vettore $v := u_4$ sarà un vettore del tipo richiesto.

Procediamo dunque, finalmente, a calcolare il vettore $v := u_4$. Secondo la formula generale del procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, tale vettore è dato da

$$v \;:=\; u_4 \;:=\; w_4 - \frac{\langle w_4, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 - \frac{\langle w_4, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\, u_2 - \frac{\langle w_4, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle}\, u_3 \;=$$

$$= (0,0,0,1) - 0/2\,(1,1,0,0) - 0\big/(3/2)\,\big(-1/2\,,1/2\,,1\,,0\big) - 4/(49/3)\,\big(1/3\,,-1/3\,,1/3\,,4\big) =$$

$$= (0,0,0,1) - \big(4/49\,,-4/49\,,4/49\,,48/49\big) = \big(-4/49\;,\;4/49\;,\;-4/49\;,\;1/49\big)$$

<u>*2^o metodo:*</u> Poiché $B := \{w_1\,, w_2\,, w_3\}$ è una base di W, un vettore $v \in V$ sarà ortogonale a W se e soltanto se sarà ortogonale ai vettori in B. In formule,

$$v \perp W \quad\Longleftrightarrow\quad v \perp w_i \; (i = 1,2,3) \quad\Longleftrightarrow\quad \circledast \begin{cases} \big\langle w_i\,, v \big\rangle = 0 \\ \forall\;\, i = 1\,,2\,,3\,; \end{cases}$$

Ora, il sistema $\circledast$ qui sopra è un sistema di tre equazioni lineari omogenee nelle quattro incognite x, y, z, t che costituiscono le tre componenti del vettore $v = (x, y, z, t)$. Siccome il prodotto scalare canonico è dato da $\big\langle w_i\,, v \big\rangle := w_i \cdot v^T$ (prodotto righe per colonne tra una matrice riga e una matrice colonna!), il sistema $\circledast$ in forma compatta si scrive come $\circledast \,:\, A\,v^T = \underline{0}^T$ con

$$\underline{0} := (0,0,0,0) = 0_V \in V \quad , \qquad A := \begin{pmatrix} w_1 \\ \text{—} \\ w_2 \\ \text{—} \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha per righe i vettori w_1, w_2 e w_3 (nell'ordine).

Passiamo dunque a risolvere il sistema $\circledast$. A tal fine, riduciamo la matrice A in forma a scala (superiore), come segue:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + (-2)\cdot \mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} =: S_A$$

dove S_A è appunto una matrice a scala (superiore). Dunque il sistema $\circledast \,:\, A\,v^T = \underline{0}^T$ è equivalente al sistema *a scala* $\circledast_S \,:\, S_A\,v^T = \underline{0}^T$. Quest'ultimo lo risolviamo in pochi passaggi, così:

$$\circledast_S \,:\, S_A\,v^T = \underline{0}^T \qquad\mapsto\qquad \begin{cases} x + y \;=\; 0 \\ y + z \;=\; 0 \\ z + 4\,t \;=\; 0 \end{cases} \qquad\mapsto\qquad \begin{cases} x \;=\; -4\,\alpha \\ y \;=\; 4\,\alpha \\ z \;=\; -4\,\alpha \\ t \;=\; \alpha \end{cases} \quad \big(\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\big)$$

per cui l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast$ è esattamente $\big\{ (-4\,\alpha\,, 4\,\alpha\,, -4\,\alpha\,, \alpha) \bigm| \alpha \in \mathbb{R} \big\}$. Una soluzione *non banale* si ottiene scegliendo un qualunque valore *non nullo* del parametro α . Ad esempio, per $\alpha = 1$ si trova il vettore $v = (-4\,, 4\,, -4\,, 1)$, che soddisfa le nostre richieste.

Già che ci siamo, osserviamo che il vettore $v = \big(-4/49\,,\, 4/49\,,\, -4/49\,,\, 1/49\big)$ ottenuto in precedenza con il primo metodo lo si (ri)ottiene adesso scegliendo il valore del parametro $\alpha = 1/49$.

N.B.: per risolvere il sistema lineare $\circledast$: $A\,v^T = \underline{0}^T$ abbiamo proceduto alla riduzione a scala della matrice A . La stessa operazione può essere effettuata per calcolare il rango di A e verificare così che i vettori w_1 , w_2 e w_3 sono linearmente indipendenti, cosa che ci serve sapere nella parte *(a)* — dove invece abbiamo seguito un'altra strada. Quindi questa operazione — la riduzione a scala di A — riesce utile per entrambi i punti *(a)* e *(b)*, e in particolare possiamo farla una volta sola per sfruttarla invece due volte! Analogamente, per risolvere il sistema $\circledast$ possiamo anche evitare di ridurre a scala la matrice A , sfruttando invece le manipolazioni (su A stessa) e i calcoli già effettuati nell'affrontare la parte *(a)*. $\square$

(continua...)

[2] Calcolare gli autovalori e gli autospazi della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

Determinare poi, *giustificando la risposta*, se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no.

Soluzione: Dalla teoria generale sappiamo che gli autovalori di A sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di A, che è il polinomio

$$p_A(x) := det\big(A - x\,I_3\big) := det\begin{pmatrix} 7-x & -4 & 5 \\ 2 & -x & -2 \\ 5 & -4 & 7-x \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante in esame tramite la regola di Sarrus, otteniamo

$$p_A(x) := det\big(A - x\,I_3\big) := det\begin{pmatrix} 7-x & -4 & 5 \\ 2 & -x & -2 \\ 5 & -4 & 7-x \end{pmatrix} =$$

$$= -x\cdot(7-x)^2 + (-4)\cdot(-2)\cdot 5 + (-4)\cdot 2\cdot 5 - 5\cdot(-x)\cdot 5 - 2\cdot(-4)\cdot(7-x) - (-2)\cdot(-4)\cdot(7-x) =$$

$$= -x\cdot\big((7-x)^2 - 25\big) = -x\cdot\big(x^2 - 14\,x + 24\big) = -x\cdot(x-2)\cdot(x-12)$$

così che $p_A(x) = -x\cdot(x-2)\cdot(x-12)$. Le radici di tale polinomio, cioè gli *autovalori* di A, sono chiaramente $\{0,2,12\}$; in formule, $Spec(A) = \{0\,,2\,,12\}$.

A questo punto, dato che $Spec(A) = \{0\,,2\,,12\}$, abbiamo che A è una matrice (quadrata) 3×3 che ha esattamente 3 autovalori: perciò, dalla teoria generale, possiamo concludere che la somma delle molteplicità geometriche di tali autovalori è proprio 3, e ciascuna di esse è esattamente 1.

La prima osservazione implica che

la matrice A è diagonalizzabile

o, in altre parole,

esiste in $V := \mathbb{R}^3$ una base composta di autovettori di A.

La seconda osservazione invece significa che ogni autospazio (non banale) di A ha dimensione 1.

Ora, se $\lambda \in Spec(A) = \{0\,,2\,,12\}$ è un qualsiasi autovalore di A, il corrispondente autospazio, in $V := \mathbb{R}^3$, è dato da

$$V_\lambda := \big\{\, v \in V \,\big|\, A\cdot v = \lambda\, v \,\big\} = Ker\big(A - \lambda\, I_3\big)$$

Dunque calcolare V_λ significa calcolare il nucleo $Ker\big(A - \lambda\, I_3\big)$ della matrice $A_\lambda := \big(A - \lambda\, I_3\big)$, cioè lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\circledast_\lambda : A_\lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, in cui $\mathbf{x} := (x,y,z)^T$ mentre $\mathbf{0} := (0,0,0)^T$. Risolviamo tale sistema riducendo a scala la matrice dei coefficienti A_λ , distinguendo i vari casi, come segue:

$$\underline{\lambda = 0} \quad\Longrightarrow\quad A_\lambda = A_0 := \begin{pmatrix} 7-0 & -4 & 5 \\ 2 & -0 & -2 \\ 5 & -4 & 7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e II riga}}}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e II riga}}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}+(-5/2)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}+(-7/2)\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & -4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}+(-1)\cdot\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_0$$

La matrice finale S_0 è a scala (superiore), e ci dice che l'autospazio V_0 non è altro che l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_0^S : S_0\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (equivalente al sistema iniziale $\circledast_0$), che si risolve così:

$$\circledast_0^S \;:\; S_0\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} 2\,x \;-\; 2\,z \;=\; 0 \\ -4\,y \;+\; 12\,z \;=\; 0 \\ 0 \;=\; 0 \end{cases} \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} x \;=\; \alpha \\ y \;=\; 3\,\alpha \quad \big(\forall\,\alpha \in \mathbb{R}\big) \\ z \;=\; \alpha \end{cases}$$

In conclusione, *l'autospazio associato all'autovalore* $\lambda_1 = 0$ *è* $V_0 = \big\{\,(\alpha\,,3\,\alpha\,,\alpha)\,\big|\,\alpha \in \mathbb{R}\,\big\}$.

$$\underline{\lambda = 2} \quad \Longrightarrow \quad A_\lambda = A_2 := \begin{pmatrix} 7-2 & -4 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}\,+\,(-1)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}\,+\,(-2/5)\cdot\mathrm{I}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}\,+\,(-1)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}\,+\,(-2/5)\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & -2/5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_2$$

La matrice finale S_2 è a scala (superiore), e ci dice che l'autospazio V_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_2^S : S_2\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (equivalente al sistema $\circledast_2$ di partenza), che risolviamo così:

$$\circledast_2^S \;:\; S_2\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} 5\,x \;-\; 4\,y \;+\; 5\,z \;=\; 0 \\ -2/5\,y \;-\; 4\,z \;=\; 0 \\ 0 \;=\; 0 \end{cases} \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} x \;=\; -9\beta \\ y \;=\; -10\,\beta \quad \big(\forall\,\beta \in \mathbb{R}\big) \\ z \;=\; \beta \end{cases}$$

Pertanto, *l'autospazio associato all'autovalore* $\lambda_2 = 2$ *è* $V_2 = \big\{\,(-9\,\beta\,,-10\,\beta\,,\beta)\,\big|\,\beta \in \mathbb{R}\,\big\}$.

$$\underline{\lambda = 12} \quad \Longrightarrow \quad A_\lambda = A_{12} := \begin{pmatrix} 7-12 & -4 & 5 \\ 2 & -12 & -2 \\ 5 & -4 & 7-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 \\ 2 & -12 & -2 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}\,+\,1\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}\,+\,2/5\cdot\mathrm{I}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}\,+\,1\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}\,+\,2/5\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 \\ 0 & -68/5 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}\,+\,(-40/68)\cdot\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 \\ 0 & -68/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{12}$$

La matrice finale S_{12} è ancora a scala (superiore), e l'autospazio V_{12} è l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_{12}^S : S_{12}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (equivalente al sistema di partenza $\circledast_{12}$), che si risolve così:

$$\circledast_{12}^S \;:\; S_{12}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} -5\,x \;-\; 4\,y \;+\; 5\,z \;=\; 0 \\ -68/5\,y \;=\; 0 \\ 0 \;=\; 0 \end{cases} \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} x \;=\; \gamma \\ y \;=\; 0 \quad \big(\forall\,\gamma \in \mathbb{R}\big) \\ z \;=\; \gamma \end{cases}$$

Perciò, *l'autospazio associato all'autovalore* $\lambda_3 = 12$ *è* $V_{12} = \big\{\,(\gamma\,,0\,,\gamma)\,\big|\,\gamma \in \mathbb{R}\,\big\}$. $\square$

(continua...)

[3] Si consideri lo spazio vettoriale metrico $V := \mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare canonico, e in esso si considerino i quattro vettori

$$\ell_1 := (1,2,3,4)\,,\quad \ell_2 := (1,-2,1,0)\,,\quad \ell_3 := (0,1,0,-5)\,,\quad \ell_4 := (1,2,3,-6) \ \in\ \mathbb{R}^4 \quad .$$

(a) Determinare se l'insieme $B_\ell := \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$ oppure no. In caso negativo, giustificare la risposta; in caso affermativo, determinare se B_ℓ sia ortonormale, oppure ortogonale, oppure né l'una né l'altra.

(b) Calcolare il coseno degli angoli $\widehat{\ell_1 \ell_2}$ e $\widehat{\ell_4 \ell_3}$.

Soluzione: *(a)* Siccome lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ ha dimensione quattro e B_ℓ si compone esattamente di quattro vettori, B_ℓ stessa sarà una base se e soltanto se i suoi vettori sono tra loro linearmente indipendenti. Ora, consideriamo la matrice

$$L := \left(\ell_1^T \,\middle|\, \ell_2^T \,\middle|\, \ell_3^T \,\middle|\, \ell_4^T \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

che ha i vettori ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 — in quest'ordine — come *colonne*. Allora tali vettori sono linearmente indipendenti se e soltanto se la matrice L ha rango 4, e quindi (visto che si tratta di una matrice *quadrata*) se e soltanto se tale matrice ha determinante diverso da zero. Per calcolare questo determinante operiamo lo sviluppo di Laplace lungo la terza colonna, il che ci dà

$$\begin{aligned} det(L) &= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \\ &\qquad + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (-5) \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= 0 - \big(-6+12+0-4-0+18\big) + 0 - (-5)\big(-6+6+2+6-2-6\big) = -20+0 = -20 \neq 0 \end{aligned}$$

Dunque abbiamo $det(L) = -20 \neq 0$, e quindi possiamo concludere che B_ℓ *è base di* $V := \mathbb{R}^4$.

A questo punto, la base B_ℓ sarà *ortogonale* se e soltanto i suoi vettori saranno a due a due ortogonali — cioè con prodotto scalare nullo. Inoltre B_ℓ sarà *ortonormale* se e soltanto se sarà ortogonale *e in aggiunta* ogni suo vettore avrà norma pari a 1.

Procediamo allora a calcolare (alcuni de)i prodotti scalari tra vettori in B_ℓ. Abbiamo

$$\big\langle \ell_1, \ell_2 \big\rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1 - 4 + 3 + 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_1 \perp \ell_2$$

cioè ℓ_1 è ortogonale a ℓ_2. Però invece

$$\big\langle \ell_1, \ell_3 \big\rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) = 0 + 2 + 0 + (-20) = -18 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_1 \not\perp \ell_3$$

cioè ℓ_1 *non è ortogonale a* ℓ_3. Quindi ne segue subito che la base B_ℓ *non è ortogonale*, e allora in particolare *non è neanche ortonormale*.

(b) In generale, il coseno dell'angolo $\widehat{vw}$ formato da due vettori non nulli v e w (in un qualunque spazio vettoriale metrico) è dato — per definizione! — dalla formula $\cos\big(\widehat{vw}\big) = \langle v, w\rangle / \|v\|\,\|w\|$. In effetti, questa formula si usa "a rovescio" ponendo $\widehat{vw} := \arccos\big(\langle v, w\rangle / \|v\|\,\|w\|\big)$, cioè serve proprio a *definire* l'angolo $\widehat{vw}$. Nel caso in esame, il calcolo diretto ci dà

$$\cos\big(\widehat{\ell_1\ell_2}\big) \;=\; \big\langle \ell_1, \ell_2 \big\rangle \Big/ \|\ell_1\|\,\|\ell_2\| \;=\; 0 \Big/ \|\ell_1\|\,\|\ell_2\| \;=\; 0$$

per il primo angolo, e

$$\begin{aligned} \cos\big(\widehat{\ell_4\ell_3}\big) \;&=\; \big\langle \ell_4, \ell_3 \big\rangle / \|\ell_4\|\,\|\ell_3\| \;= \\ &=\; \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-6)\cdot(-5)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+(-6)^2}\,\sqrt{0^2+1^2+0^2+(-5)^2}} \;=\; \frac{32}{\sqrt{50}\,\sqrt{26}} \;=\; \frac{16}{5\,\sqrt{13}} \end{aligned}$$

per il secondo. □