GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2010/2011

prof. Fabio GAVARINI

Esonero del 15 Febbraio 2011

Svolgimento completo

········· $*$ ·········

N.B.: lo svolgimento qui presentato è chilometrico... Questo non vuol dire *che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si è colta l'occasione per spiegare — anche in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con dovizia di particolari tutti gli aspetti della teoria toccati in maggiore o minore misura dal testo in esame.*

[1] Si consideri lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$, e in esso siano $\underline{e}_1 := (1,0,0)$, $\underline{e}_2 := (0,1,0)$, $\underline{e}_3 := (0,0,1)$ i vettori della base canonica. Siano poi $T' : V \longrightarrow V$ e $T'' : V \longrightarrow V$ gli endomorfismi di V tali che

$$T' : \begin{cases} \underline{e}_1 \mapsto T'(\underline{e}_1) := \underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 + 6\,\underline{e}_3 \\ \underline{e}_2 \mapsto T'(\underline{e}_2) := -3\,\underline{e}_1 - 5\,\underline{e}_2 - 6\,\underline{e}_3 \\ \underline{e}_3 \mapsto T'(\underline{e}_3) := 3\,\underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 + 4\,\underline{e}_3 \end{cases}$$

e, rispettivamente,

$$T'' : \begin{cases} \underline{e}_1 \mapsto T''(\underline{e}_1) := -3\,\underline{e}_1 - 7\,\underline{e}_2 - 6\,\underline{e}_3 \\ \underline{e}_2 \mapsto T''(\underline{e}_2) := \underline{e}_1 + 5\,\underline{e}_2 + 6\,\underline{e}_3 \\ \underline{e}_3 \mapsto T''(\underline{e}_3) := -\underline{e}_1 - \underline{e}_2 - 2\,\underline{e}_3 \end{cases}$$

(a) Determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di T' e di T''.

(b) Determinare (giustificando le conclusioni) se T' e T'' siano diagonalizzabili o no.

<u>*Soluzione*</u>*:* Per rispondere a tutte le richieste, descriviamo i due endomorfismi T' e T'' tramite matrici. Precisamente, avremo

$$T'(\underline{x}) = A' \cdot \underline{x} \qquad , \qquad T''(\underline{x}) = A'' \cdot \underline{x} \qquad \forall\ \underline{x} \in V := \mathbb{R}^3$$

per opportune matrici $A', A'' \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$. In effetti, tali matrici sono date da

$$A' \,=\, \big(T'(\underline{e}_1)\,\big|\,T'(\underline{e}_2)\,\big|\,T'(\underline{e}_3)\big) \qquad , \qquad A'' \,=\, \big(T''(\underline{e}_1)\,\big|\,T''(\underline{e}_2)\,\big|\,T''(\underline{e}_3)\big) \tag{1}$$

in altre parole, A' è la matrice 3×3 che ha per colonne le terne immagine dei vettori $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ della base canonica secondo T', e similmente A'' è la matrice 3×3 le cui colonne sono le terne immagine dei vettori $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ della base canonica tramite T''.

Ora, dalle definizioni abbiamo

$$\begin{aligned}
T'(\underline{e}_1) &:= \underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 + 6\,\underline{e}_3 \,=\, (1,0,0) \,+\, 3\,(0,1,0) \,+\, 6\,(0,0,1) \,=\, (1,3,6) \\
T'(\underline{e}_2) &:= -3\,\underline{e}_1 - 5\,\underline{e}_2 - 6\,\underline{e}_3 \,=\, -3\,(1,0,0) \,-\, 5\,(0,1,0) \,-\, 6\,(0,0,1) \,=\, (-3,-5,-6) \\
T'(\underline{e}_3) &:= 3\,\underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 + 4\,\underline{e}_3 \,=\, 3\,(1,0,0) \,+\, 3\,(0,1,0) \,+\, 4\,(0,0,1) \,=\, (3,3,4)
\end{aligned}$$

per A', e similmente per A'' troviamo

$$\begin{aligned}
T''(\underline{e}_1) &:= -3\,\underline{e}_1 - 7\,\underline{e}_2 - 6\,\underline{e}_3 \,=\, -3\,(1,0,0) \,-\, 7\,(0,1,0) \,-\, 6\,(0,0,1) \,=\, (-3,-7,-6) \\
T''(\underline{e}_2) &:= \underline{e}_1 + 5\,\underline{e}_2 + 6\,\underline{e}_3 \,=\, (1,0,0) \,+\, 5\,(0,1,0) \,+\, 6\,(0,0,1) \,=\, (1,5,6) \\
T''(\underline{e}_3) &:= -\,\underline{e}_1 - \,\underline{e}_2 - 2\,\underline{e}_3 \,=\, -\,(1,0,0) \,-\, (0,1,0) \,-\, 2\,(0,0,1) \,=\, (-1,-1,-2)
\end{aligned}$$

Da questo e dalla (1) otteniamo che

$$A' \,=\, \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad , \qquad A'' \,=\, \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Andiamo ora ad affrontare i quesiti in *(a)* e in *(b)*.

(a) Gli autovalori e gli autospazi di T' e di T'' sono, rispettivamente, quelli della matrice A' e della matrice A''. In particolare, ricordiamo che gli autovalori di una qualsiasi matrice quadrata A (di ordine n) sono esattamente tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico $p_A(x) := det\big(A - xI_n\big)$. Vediamo dunque tali polinomi caratteristici, e le loro radici.

Per la matrice A' il polinomio caratteristico è (calcolandolo con la regola di Sarrus)

$$p_{A'}(x) \,:=\, det\big(A' - xI_3\big) \,=\, det\begin{pmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{pmatrix} \,=$$
$$= (1-x)(-5-x)(4-x) + 3\cdot(-6)\cdot 3 + (-3)\cdot 3\cdot 6 - 3\cdot(-5-x)\cdot 6 - (-3)\cdot 3\cdot(4-x) - 3\cdot(-6)\cdot(1-x) =$$
$$= \,-x^3 \,+\, 12\,x \,+\, 16 \,=\, -(x+2)^2\,(x-4)$$

Perciò da $p_{A'}(x) = -(x+2)^2\,(x-4)$ vediamo che le radici di $p_{A'}(x)$ sono -2 e 4: quindi

gli autovalori di A', e quindi di T', sono -2 e 4.

Analogamente, per la matrice A'' il polinomio caratteristico è

$$p_{A''}(x) \;:=\; det\big(A'' - xI_3\big) \;=\; det\begin{pmatrix} -3-x & 1 & -1 \\ -7 & 5-x & -1 \\ -6 & 6 & -2-x \end{pmatrix} \;=$$
$$= (-3-x)(5-x)(-2-x) \,+\, 1\cdot(-1)\cdot(-6) \,+\, (-7)\cdot 6\cdot(-1) \,-$$
$$-\,(-1)\cdot(5-x)\cdot(-6) \,-\, 1\cdot(-7)\cdot(-2-x) \,-\, (-1)\cdot 6\cdot(-3-x) =$$
$$= \; -x^3 \,+\, 12\,x \,+\, 16 \;=\; -(x+2)^2\,(x-4)$$

Così $p_{A''}(x) \,=\, p_{A'}(x)$ e quindi le radici, e dunque gli autovalori, di $p_{A''}(x)$ sono le (gli) stesse(i) di $p_{A'}(x)$: pertanto

gli autovalori di A'', e quindi di T'', sono -2 e 4 .

Per quanto riguarda il calcolo degli autospazi, ricordiamo alcuni fatti generali.

Se λ è un autovalore di un endomorfismo T di uno spazio V, l'autospazio V_λ associato a λ è il nucleo dell'endomorfismo $T - \lambda\, id_V$, cioè $V_\lambda = Ker\big(T - \lambda\, id_V\big)$. Se A è la matrice che esprime T rispetto ad una fissata base di V, allora la matrice che (rispetto alla stessa base) esprime $T - \lambda\, id_V$ è $A - \lambda\, I_n$, dove $n := dim(V)$: perciò

$$V_\lambda \;=\; Ker\big(T - \lambda\, id_V\big) \;=\; Ker\big(A - \lambda\, I_n\big)$$

Ora, lo spazio $Ker\big(A - \lambda\, I_n\big)$ corrisponde — nell'isomorfismo tra V e $\mathbb{R}^n$ indotto dalla scelta della base di V — allo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti sia proprio $A - \lambda\, I_n$, cioè il sistema

$$\circledast_\lambda \,:\; M_\lambda \cdot \underline{x} \;=\; \underline{0} \qquad\quad \text{con} \qquad M_\lambda := A - \lambda\, I_n \qquad \text{e} \qquad \underline{x} = (x_1\,,\, \dots\,,\, x_n)$$

Quindi il calcolo dell'autospazio che ci interessa si riduce alla risoluzione di un sistema lineare omogeneo.

Veniamo ai casi specifici che di cui dobbiamo occuparci.

Per T', l'autospazio V'_{-2} relativo all'autovalore -2 è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\circledast'_{-2} \,:\; M'_{-2} \cdot \underline{x} \;=\; \underline{0} \qquad\quad \text{con} \qquad M'_{-2} \;:=\; A' - (-2)\, I_3 \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema $\circledast'_{-2}$ tramite il procedimento di riduzione a scala (=R.S.), che dà

$$M'_{-2} \;:=\; \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, il sistema $\circledast'_{-2}$ è equivalente al sistema a scala

$$\circledast'^{,\,S}_{-2} \; : \; \begin{cases} 3\,x_1 \; - \; 3\,x_2 \; + \; 3\,x_3 \; = \; 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \; = \; 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \; = \; 0 \end{cases}$$

il cui insieme di soluzioni è $\big\{ (\alpha\,,\,\beta\,,\,\beta-\alpha\,) \,\big|\, \alpha,\beta \,\in\, \mathbb{R} \big\}$. Dunque concludiamo che *l'autospazio V'_{-2} relativo all'autovalore -2 per l'endomorfismo T'* è

$$V'_{-2} \; = \; \big\{ (\alpha\,,\,\beta\,,\,\beta-\alpha\,) \,\big|\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \big\} \tag{2}$$

Sempre per T', l'autospazio V'_4 relativo all'autovalore 4 è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\circledast'_4 \, : \; M'_4 \cdot \underline{x} \; = \; \underline{0} \qquad\qquad \text{con} \qquad M'_4 \; := \; A' - 4\,I_3 \; = \; \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema $\circledast'_4$ tramite il procedimento di riduzione a scala (=R.S.), che dà

$$M'_4 \; := \; \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 2\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + \mathrm{I}} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, il sistema $\circledast'_4$ è equivalente al sistema a scala

$$\circledast'^{,\,S}_{4} \; : \; \begin{cases} -\,3\,x_1 \; - \; 3\,x_2 \; + \; 3\,x_3 \; = \; 0 \\ \qquad\quad -\,12\,x_2 \; + \; 6\,x_3 \; = \; 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \; = \; 0 \end{cases}$$

il cui insieme di soluzioni è $\big\{ (\gamma/2\,,\,\gamma/2\,,\,\gamma\,) \,\big|\, \gamma \in \mathbb{R} \big\} \; = \; \big\{ (\delta\,,\,\delta\,,\,2\,\delta\,) \,\big|\, \delta \in \mathbb{R} \big\}$. Dunque si conclude che *l'autospazio V'_4 relativo all'autovalore 4 per l'endomorfismo T'* è

$$V'_4 \; = \; \big\{ (\delta\,,\,\delta\,,\,2\,\delta\,) \,\big|\, \delta \in \mathbb{R} \big\} \tag{3}$$

Per quanto riguarda T'', l'autospazio V''_{-2} relativo all'autovalore -2 è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\circledast''_{-2} \, : \; M''_{-2} \cdot \underline{x} \; = \; \underline{0} \qquad\qquad \text{con} \qquad M''_{-2} \; := \; A'' - (-2)\,I_3 \; = \; \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema $\circledast''_{-2}$ tramite il procedimento di riduzione a scala (=R.S.), che dà

$$M''_{-2} \; := \; \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 6\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 7\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, il sistema $\circledast''_{-2}$ è equivalente al sistema a scala

$$\circledast''^{,S}_{-2}\ :\ \begin{cases} -\,x_1 \,+\, x_2 \,-\, x_3 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\quad 6\,x_3 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; 0 \;=\; 0 \end{cases}$$

il cui insieme di soluzioni è $\big\{(\alpha\,,\,\alpha\,,\,0\,)\,\big|\,\alpha\,\in\,\mathbb{R}\,\big\}$. Dunque possiamo concludere che *l'autospazio* V''_{-2} *relativo all'autovalore* -2 *per l'endomorfismo* T'' *è*

$$V''_{-2} \;=\; \big\{(\alpha\,,\,\alpha\,,\,0\,)\,\big|\,\alpha\in\mathbb{R}\,\big\} \tag{4}$$

Ancora per l'endomorfismo T'', l'autospazio V''_4 relativo all'autovalore 4 è lo spazio di tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\circledast''_4\,:\; M''_4\cdot\underline{x} \;=\; \underline{0} \qquad\qquad \text{con} \qquad M''_4 \;:=\; A''-4\,I_3 \;=\; \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema $\circledast''_4$ tramite il procedimento di riduzione a scala (=R.S.), che dà

$$M''_4 \;:=\; \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}\,-\,6/7\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}\,-\,\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36/7 & -36/7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{scambio II} \\ \text{e III riga}}]{} \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & 36/7 & -36/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, il sistema $\circledast''_4$ è equivalente al sistema a scala

$$\circledast''^{,S}_{4}\ :\ \begin{cases} -\,7\,x_1 \,+\, x_2 \,-\, x_3 \;=\; 0 \\ 36/7\,x_2 \,-\, 36/7\,x_3 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \;=\; 0 \end{cases}$$

il cui insieme di soluzioni è $\big\{(0\,,\,\beta\,,\,\beta\,)\,\big|\,\beta\,\in\,\mathbb{R}\,\big\}$. Dunque in conclusione troviamo che *l'autospazio* V''_4 *relativo all'autovalore* 4 *per l'endomorfismo* T'' *è*

$$V''_4 \;=\; \big\{(0\,,\,\beta\,,\,\beta\,)\,\big|\,\beta\in\mathbb{R}\,\big\} \tag{5}$$

(b) Ricordiamo che, se λ è un autovalore di un endomorfismo T di uno spazio V, e V_λ è l'autospazio associato a λ, la *molteplicità* di λ è la dimensione di V_λ, indicata con $m_\lambda := \mathit{dim}\big(V_\lambda\big)$. Abbiamo allora il seguente *criterio per la diagonalizzabilità* di T :

T *è diagonalizzabile* $\iff$ *la somma delle molteplicità degli autovalori di* T *è* $\mathit{dim}\big(V\big)$.

Nel caso di $T := T'$ indichiamo con $m'_\lambda := dim\big(V'_\lambda\big)$ la molteplicità dell'autovalore λ.

Ora, la (2) ci dà $V'_{-2} = \big\{(\alpha\,,\,\beta\,,\,\beta-\alpha)\,\big|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\big\}$, da cui vediamo che V'_{-2} ha per base (ad esempio) l'insieme $\big\{(1,0,-1)\,,\,(0,1,1)\big\}$; quindi $m'_{-2} := dim\big(V'_{-2}\big) = 2$.

Analogamente, la (3) ci dà $V'_4 = \big\{(\delta\,,\,\delta\,,\,2\,\delta)\,\big|\,\delta\in\mathbb{R}\big\}$, così abbiamo che V'_4 ammette per base (ad esempio) l'insieme $\big\{(1,1,2)\big\}$; quindi $m'_4 := dim\big(V'_4\big) = 1$.

A questo punto la somma delle molteplicità degli autovalori di T' è

$$m'_{-2} + m'_4 = 2 + 1 = 3 = dim\big(\mathbb{R}^3\big) = dim\big(V\big)$$

e quindi concludiamo che T' è *diagonalizzabile*.

Nel caso di $T := T''$ indichiamo la molteplicità dell'autovalore λ con $m''_\lambda := dim\big(V''_\lambda\big)$.

Adesso la (4) ci dà $V''_{-2} = \big\{(\alpha\,,\,\alpha\,,\,0)\,\big|\,\alpha\in\mathbb{R}\big\}$, dunque V''_{-2} ammette come base (per esempio) l'insieme $\big\{(1,1,0)\big\}$; quindi $m''_{-2} := dim\big(V''_{-2}\big) = 1$.

Allo stesso modo, per la (5) abbiamo $V''_4 = \big\{(0\,,\,\beta\,,\,\beta)\,\big|\,\beta\in\mathbb{R}\big\}$, così che V''_4 ha per base (ad esempio) l'insieme $\big\{(0,1,1)\big\}$; quindi $m'_4 := dim\big(V''_4\big) = 1$.

In conclusione la somma delle molteplicità degli autovalori di T'' è

$$m''_{-2} + m''_4 = 1 + 1 \neq 3 = dim\big(\mathbb{R}^3\big) = dim\big(V\big)$$

e quindi otteniamo che T'' *non è diagonalizzabile*. $\square$

——— ∗ ∗ ∗ ———

[2] Dato lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$, si considerino la funzione $g : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definita — per ogni $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\underline{y} = (y_1,y_2,y_3) \in V := \mathbb{R}^3$ — dalla formula

$$g\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) := -x_1y_1 + 6\,x_1y_2 + 6\,x_2y_1 + 3\,x_1y_3 + 3\,x_3y_1 - 15\,x_2y_2 - 3\,x_2y_3 - 3\,x_3y_2 + 2\,x_3y_3$$

Dimostrare che:

(a) g è una forma bilineare.

(b) g è simmetrica.

(c) g è non degenere.

(d) g non è definita positiva.

__Soluzione__: *(a)* Ricordiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra le forme bilineari in $V := \mathbb{R}^3$ e le matrici 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$. In tale corrispondenza, ad una forma bilineare, diciamo $h : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$, si associa la matrice A_h, detta *matrice di Gram* di h, definita dalla formula

$$A_h := \begin{pmatrix} h(\underline{e}_1,\underline{e}_1) & h(\underline{e}_1,\underline{e}_2) & h(\underline{e}_1,\underline{e}_3) \\ h(\underline{e}_2,\underline{e}_1) & h(\underline{e}_2,\underline{e}_2) & h(\underline{e}_2,\underline{e}_3) \\ h(\underline{e}_3,\underline{e}_1) & h(\underline{e}_3,\underline{e}_2) & h(\underline{e}_3,\underline{e}_3) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

e *caratterizzata univocamente* dal soddisfare l'identità

$$h\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) \;=\; \underline{x}^{T}\cdot A_h\cdot \underline{y} \qquad \forall\;\underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^3 \tag{7}$$

Pertanto, la funzione g in esame è una forma bilineare *se e soltanto se* soddisfa l'identità corrispondente a (7), cioè

$$g\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) \;=\; \underline{x}^{T}\cdot A_g\cdot \underline{y} \qquad \forall\;\underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^3 \tag{8}$$

dove A_g è a matrice definita come in (6), precisamente — calcolando esplicitamente i coefficienti —

$$A_g \;:=\; \begin{pmatrix} g(\underline{e}_1,\underline{e}_1) & g(\underline{e}_1,\underline{e}_2) & g(\underline{e}_1,\underline{e}_3) \\ g(\underline{e}_2,\underline{e}_1) & g(\underline{e}_2,\underline{e}_2) & g(\underline{e}_2,\underline{e}_3) \\ g(\underline{e}_3,\underline{e}_1) & g(\underline{e}_3,\underline{e}_2) & g(\underline{e}_3,\underline{e}_3) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

A questo punto, la verifica diretta ci mostra che l'identità (8), con A_g come in (9), è effettivamente soddisfatta. Dunque possiamo concludere che g è una forma bilineare.

N.B.: in alternativa, possiamo dimostrare che g è effettivamente una forma bilineare tramite verifica diretta. Infatti, g è (una forma) bilineare, per definizione (!), se e soltanto se si ha

$$\begin{aligned} g\big(\underline{x}'+\underline{x}'',\,\underline{y}\big) \;&=\; g\big(\underline{x}',\,\underline{y}\big)+g\big(\underline{x}'',\,\underline{y}\big) \qquad \forall\;\underline{x}',\underline{x}'',\underline{y}\in\mathbb{R}^3 \\ g\big(\underline{x},\,\underline{y}'+\underline{y}''\big) \;&=\; g\big(\underline{x},\,\underline{y}'\big)+g\big(\underline{x},\,\underline{y}''\big) \qquad \forall\;\underline{x},\underline{y}',\underline{y}''\in\mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{10}$$

(cioè: g è *additiva nella prima e nella seconda variabile*) e

$$\begin{aligned} g\big(\alpha\,\underline{x}\,,\,\underline{y}\big) \;&=\; \alpha\,g\big(\underline{x}\,,\,\underline{y}\big) \qquad \forall\;\underline{x}\,,\underline{y}\in\mathbb{R}^3,\;\alpha\in\mathbb{R} \\ g\big(\underline{x}\,,\,\beta\,\underline{y}\big) \;&=\; \beta\,g\big(\underline{x}\,,\,\underline{y}\big) \qquad \forall\;\underline{x}\,,\underline{y}\in\mathbb{R}^3,\;\beta\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{11}$$

(cioè: g è *omogenea nella prima e nella seconda variabile*). Ora, il calcolo diretto ci dà

$$\begin{aligned} & g\big(\underline{x}'+\underline{x}'',\,\underline{y}\big) \;= \\ &\quad=\; -\big(x_1'+x_1''\big)y_1 \,+\, 6\,\big(x_1'+x_1''\big)y_2 \,+\, 6\,\big(x_2'+x_2''\big)y_1 \,+\, 3\,\big(x_1'+x_1''\big)y_3 \,+\, 3\,\big(x_3'+x_3''\big)y_1 \,- \\ &\qquad\qquad -\,15\,\big(x_2'+x_2''\big)y_2 \,-\, 3\,\big(x_2'+x_2''\big)y_3 \,-\, 3\,\big(x_3'+x_3''\big)y_2 \,+\, 2\,\big(x_3'+x_3''\big)y_3 \;= \\ &=\; -x_1'y_1 - x_1''y_1 + 6\,x_1'y_2 + 6\,x_1''y_2 + 6\,x_2'y_1 + 6\,x_2''y_1 + 3\,x_1'y_3 + 3\,x_1''y_3 + 3\,x_3'y_1 + 3\,x_3''y_1 \,- \\ &\qquad -\,15\,x_2'y_2 - 15\,x_2''y_2 - 3\,x_2'y_3 - 3\,x_2''y_3 - 3\,x_3'y_2 - 3\,x_3''y_2 + 2\,x_3'y_3 + 2\,x_3''y_3 \;= \\ &=\; \big(-x_1'y_1 + 6\,x_1'y_2 + 6\,x_2'y_1 + 3\,x_1'y_3 + 3\,x_3'y_1 - 15\,x_2'y_2 - 3\,x_2'y_3 - 3\,x_3'y_2 + 2\,x_3'y_3\big) \,+ \\ &+\,\big(-x_1''y_1 + 6\,x_1''y_2 + 6\,x_2''y_1 + 3\,x_1''y_3 + 3\,x_3''y_1 - 15\,x_2''y_2 - 3\,x_2''y_3 - 3\,x_3''y_2 + 2\,x_3''y_3\big) \;= \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =\; g\big(\underline{x}',\,\underline{y}\big) \,+\, g\big(\underline{x}'',\,\underline{y}\big) \end{aligned}$$

(sfruttando la distributività del prodotto — tra numeri — rispetto alla somma, e la commutatività della somma — tra numeri) così che la prima delle due identità in (10) è effettivamente verificata; in modo del tutto simile si verifica anche la seconda. Analogamente, il calcolo diretto ci dà anche

$$g(\alpha\,\underline{x}\,,\,\underline{y}\,) \;=$$
$$= -(\alpha\,x_1)\,y_1 \,+\, 6\,(\alpha\,x_1)\,y_2 \,+\, 6\,(\alpha\,x_2)\,y_1 \,+\, 3\,(\alpha\,x_1)\,y_3 \,+\, 3\,(\alpha\,x_3)\,y_1 \,-$$
$$-\; 15\,(\alpha\,x_2)\,y_2 \,-\, 3\,(\alpha\,x_2)\,y_3 \,-\, 3\,(\alpha\,x_3)\,y_2 \,+\, 2\,(\alpha\,x_3)\,y_3 \;=$$
$$= \alpha\,\big(-\,x_1y_1 + 6\,x_1y_2 + 6\,x_2y_1 + 3\,x_1y_3 + 3\,x_3y_1 \,-\, 15\,x_2y_2 - 3\,x_2y_3 - 3\,x_3y_2 + 2\,x_3y_3\big) \;=$$
$$= \;\alpha\,g(\,\underline{x}\,,\,\underline{y}\,)$$

(sfruttando l'associatività e la commutatività del prodotto — tra numeri — e la sua la distributività rispetto alla somma) che significa che la prima delle due identità in (11) è effettivamente verificata; in modo del tutto analogo poi si verifica pure la seconda.

(b) Dalla teoria generale sappiamo che varie proprietà della forma g dipendono da corrispondenti proprietà della matrice associata A_g. In particolare, abbiamo che

g è simmetrica se e soltanto se A_g è simmetrica (cioè $A_g^{\,T} = A_g$).

Ora, la matrice trasposta $A_g^{\,T}$ di A_g si ottiene scambiando righe e colonne di A_g, e quindi è

$$A_g^{\,T} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \;=\; A_g$$

dunque $A_g^{\,T} = A_g$ e così effettivamente g è simmetrica.

N.B.: in alternativa, possiamo dimostrare che g è simmetrica mediante una verifica diretta. Infatti, g è simmetrica, per definizione (!), se e soltanto se si ha

$$g(\,\underline{x}\,,\,\underline{y}\,) \;=\; g(\,\underline{y}\,,\,\underline{x}\,) \qquad \forall\;\, \underline{x}\,,\underline{y} \in \mathbb{R}^3 \tag{12}$$

Ora, il calcolo diretto ci dà

$$g(\,\underline{x}\,,\,\underline{y}\,) \;=$$
$$= -x_1y_1 \,+\, 6\,x_1y_2 \,+\, 6\,x_2y_1 \,+\, 3\,x_1y_3 \,+\, 3\,x_3y_1 \,-\, 15\,x_2y_2 \,-\, 3\,x_2y_3 \,-\, 3\,x_3y_2 \,+\, 2\,x_3y_3 \;=$$
$$= -y_1x_1 \,+\, 6\,y_1x_2 \,+\, 6\,y_2x_1 \,+\, 3\,y_1x_3 \,+\, 3\,y_3x_1 \,-\, 15\,y_2x_2 \,-\, 3\,y_2x_3 \,-\, 3\,y_3x_2 \,+\, 2\,y_3x_3 \;=$$
$$= \;g(\,\underline{y}\,,\,\underline{x}\,)$$

grazie alla commutatività del prodotto (tra numeri); così la (12) è effettivamente verificata.

(c) Come in *(b)*, dalla teoria generale abbiamo anche che

g è non degenere se e soltanto se A_g è non singolare (cioè $det(A_g) \neq 0$).

Ora, il determinante di A_g, tramite calcolo diretto (con la regola di Sarrus), risulta essere

$$det(A_g) \;=\; det\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \;=$$
$$= \;(-1)\cdot(-15)\cdot 2 + 6\cdot(-3)\cdot 3 + 6\cdot(-3)\cdot 3 \,-\, 3\cdot(-15)\cdot 3 \,-\, 6\cdot 6\cdot 2 \,-\, (-3)\cdot(-3)\cdot(-1) \;=$$
$$= \;30 \,+\, (-54) \,+\, (-54) \,-\, (-135) \,-\, 72 \,-\, (-9) \;=\; 30 - 54 - 54 + 135 - 72 + 9 \;=\; -6$$

dunque $det(A_g) = -6 \neq 0$, perciò A_g è non singolare e quindi g è non degenere.

(d) Come in *(b)* e in *(c)*, sempre dalla teoria generale abbiamo pure che

g *non è definita positiva se e soltanto se esiste* $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ *tale che* $g(\underline{x}, \underline{x}) \not> 0$.

Ora, il calcolo diretto — o semplicemente la lettura della matrice A_g — ci mostra che si ha, ad esempio,

$$g(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = -1 \not> 0 \qquad \text{con} \qquad \underline{e}_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$$

come anche

$$g(\underline{e}_2, \underline{e}_2) = -15 \not> 0 \qquad \text{con} \qquad \underline{e}_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$$

e quindi possiamo concludere che g non è definita positiva. $\square$

——— $* * *$ ———

[3] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) .$$

(a) Dimostrare che A è diagonalizzabile.

(b) Dimostrare che gli autospazi di A sono — come sottospazi di $V := \mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare canonico — a due a due ortogonali.

(c) Determinare una base diagonalizzante di A che sia ortonormale.

Soluzione: Per cominciare, indichiamo con V lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$ e con $Sp(A)$ lo spettro di A, cioè l'insieme degli autovalori di A. Ricordiamo che gli autovalori di A sono tutte sole le radici del *polinomio caratteristico di* A, che a sua volta è, per definizione,

$$\begin{aligned} p_A(x) &:= det\big(A - x\, I_3\big) = det \begin{pmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix} = \\ &= (1-x)\cdot(2-x)\cdot(1-x) + (-1)\cdot(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)\cdot 0 - \\ &\quad - 0\cdot(2-x)\cdot 0 - (-1)\cdot(-1)\cdot(1-x) - (-1)\cdot(-1)\cdot(1-x) = \\ &= (1-x)^2\cdot(2-x) + 0 + 0 - 0 - (1-x) - (1-x) = \\ &= (1-x)\big((1-x)\cdot(2-x) - 2\big) = (1-x)\big(2 - 3x + x^2 - 2\big) = \\ &= (1-x)\big(-3x + x^2\big) = (1-x)(x-3)\,x \end{aligned}$$

Dunque abbiamo $p_A(x) = (1-x)(x-3)\,x$, le cui radici — che sono gli autovalori di A — sono chiaramente 0, 1 e 3; quindi lo spettro di A è $Sp(A) = \{0, 1, 3\}$.

(a) Abbiamo visto che $Sp(A)=\{0\,,\,1\,,\,3\}$: dunque, in particolare, il numero di autovalori (distinti) di A è 3, che è uguale alla dimensione dello spazio $V:=\mathbb{R}^3$ (sul quale la matrice A agisce come endomorfismo, del quale consideriamo gli autovalori, autovettori, ecc. ecc.). Allora, da questa uguaglianza — per la teoria generale — possiamo dedurre che *A è diagonalizzabile.*

<u>NOTA</u>: Attenzione! Qui stiamo usando il seguente risultato:

Se il numero di autovalori (distinti) di un endomorfismo T dello spazio vettoriale V è pari alla dimensione di V, allora l'endomorfismo in questione è diagonalizzabile.

Però devo sottolineare che *non è vero il viceversa* (né, d'altra parte, ci interessa!...) cioè

Non è vero che "se l'endomorfismo T è diagonalizzabile, allora il numero dei suoi autovalori (distinti) è pari alla dimensione dello spazio V".

In altre parole, con i due numeri considerati — numero N di autovalori e dimensione d dello spazio (col primo sempre minore o uguale al secondo, cioè $N\leq d$) — l'uguaglianza è condizione *sufficiente* per la diagonalizzazione, ma *non necessaria.* In formule, questo si esprime così:

$$N=d \implies T \text{ è diagonalizzabile} \quad , \qquad T \text{ è diagonalizzabile} \;\not\Longrightarrow\; N=d \qquad \diamondsuit$$

(b) Detto $\lambda\in Sp(A)=\{0\,,\,1\,,\,3\}$ un autovalore di A, indichiamo con

$$V_\lambda := \big\{\, \underline{x}\in V \;\big|\; A\cdot\underline{x}=\lambda\,\underline{x} \,\big\}$$

il corrispondente autospazio. Sappiamo allora che si ha anche

$$V_\lambda \;=\; Ker\big(A-\lambda\, I_3\big)$$

cioè l'autospazio V_λ è il sottospazio (in $V:=\mathbb{R}^3$) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è proprio $A-\lambda\, I_3$, cioè il sistema

$$\circledast_\lambda : \; M_\lambda\cdot\underline{x}\;=\;\underline{0} \qquad\qquad \text{dove} \qquad M_\lambda := A-\lambda\, I_3 \quad , \quad \underline{x}=(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)\in\mathbb{R}^3=:V$$

Dunque per calcolare i tre autospazi V_0 , V_1 e V_3 dobbiamo risolvere i tre sistemi lineari omogenei $\circledast_0$, $\circledast_1$ e $\circledast_3$: a tal fine, opereremo in ogni caso una riduzione a scala (=R.S:).

Per il *primo* sistema, la matrice dei coefficienti è

$$M_0 \;=\; A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e il procedimento di R.S. ci dà

$$M_0 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\;\mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}\;]{\;\mathrm{II}\mapsto\mathrm{II}+\mathrm{I}\;} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\;\mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}+\mathrm{II}\;]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_0$$

Pertanto, il sistema $\circledast_0 \, : \, M_0 \cdot \underline{x} \, = \, \underline{0}$ è equivalente al sistema *a scala* $\circledast_0^S \, : \, S_0 \cdot \underline{x} \, = \, \underline{0}$, per il quale lo spazio delle soluzioni, cioè l'autospazio V_0 cercato, è

$$V_0 \; = \; \big\{ (\alpha, \alpha, \alpha) \,\big|\, \alpha \in \mathbb{R} \,\big\} \tag{13}$$

In particolare, una (possibile) base di tale autospazio è data da $B_0 := \big\{ v_0 := (1,1,1) \big\}$.

Per il *secondo* sistema, la matrice dei coefficienti è

$$M_1 \; = \; A - I_3 \; = \; \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e per essa il procedimento di R.S. dà

$$M_1 \; = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e II riga}}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_1$$

Perciò il sistema $\circledast_1 \, : \, M_1 \cdot \underline{x} \, = \, \underline{0}$ è equivalente al sistema *a scala* $\circledast_1^S \, : \, S_1 \cdot \underline{x} \, = \, \underline{0}$, per il quale lo spazio delle soluzioni, cioè l'autospazio V_1 cercato, è pari a

$$V_1 \; = \; \big\{ (\beta, 0, -\beta) \,\big|\, \beta \in \mathbb{R} \,\big\} \tag{14}$$

In particolare, una base di tale autospazio è data (ad esempio) da $B_1 := \big\{ v_1 := (1,0,-1) \big\}$.

Per il *terzo* sistema, la matrice dei coefficienti è

$$M_3 \; = \; A - 3\, I_3 \; = \; \begin{pmatrix} 1-3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-3 & -1 \\ 0 & -1 & 1-3 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e per essa il procedimento di R.S. dà

$$M_3 \; = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e II riga}}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 2\,\mathrm{I}}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 2\,\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 2\,\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_3$$

Dunque il sistema $\circledast_3 \, : \, M_3 \cdot \underline{x} \, = \, \underline{0}$ è equivalente al sistema *a scala* $\circledast_3^S \, : \, S_3 \cdot \underline{x} \, = \, \underline{0}$, per il quale lo spazio delle soluzioni, cioè l'autospazio V_3 cercato, è dato da

$$V_3 \; = \; \big\{ (\gamma, -2\,\gamma, \gamma) \,\big|\, \gamma \in \mathbb{R} \,\big\} \tag{15}$$

In particolare, una base di tale autospazio è data (per esempio) da $B_3 := \big\{ v_3 := (1,-2,1) \big\}$.

<u>*NOTA:*</u> a questo punto è doverosa una verifica! Precisamente, è più che opportuno verificare che le formule date in (13), (14) e (15) per descrivere gli autospazi siano corrette.

Per cominciare, introduciamo la notazione

$$V_0' = \big\{(\alpha,\alpha,\alpha)\,\big|\,\alpha\in\mathbb{R}\big\} \quad , \quad V_1' = \big\{(\beta,0,-\beta)\,\big|\,\beta\in\mathbb{R}\big\} \quad , \quad V_3' = \big\{(\gamma,-2\,\gamma,\gamma)\,\big|\,\gamma\in\mathbb{R}\big\}$$

Ciascuno dei suindicati sottoinsiemi di V è chiaramente un sottospazio: dobbiamo però verifricare che ognuno di essi coincide con l'autospazio corrispondente, cioè che

$$V_0' = V_0 \quad , \qquad V_1' = V_1 \quad , \qquad V_3' = V_3 \tag{16}$$

Ora, il calcolo diretto ci dà, per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$A\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-\alpha+0\\ -\alpha+2\,\alpha-\alpha\\ 0-\alpha+\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$$

il che dimostra che *ogni vettore della forma* (α,α,α) *è effettivamente un autovettore di* A *relativo all'autovalore* 0: quindi abbiamo l'inclusione $V_0'\subseteq V_0$.

N.B.: d'altra parte, si noti invece che ciò che abbiamo fatto *non* dimostra invece il viceversa, cioè che *"ogni autovettore di* A *relativo all'autovalore* 0 *è un vettore della forma* (α,α,α)". In altre parole, *non* abbiamo provato (anche) l'inclusione inversa $V_0'\supseteq V_0$, e quindi *non* possiamo (ancora) concludere che valga l'uguaglianza $V_0'=V_0$.

Ancora dal calcolo diretto otteniamo, per ogni $\beta\in\mathbb{R}$,

$$A\cdot\begin{pmatrix}\beta\\ 0\\ -\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta\\ 0\\ -\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta-0+0\\ -\beta+0+\beta\\ 0-0-\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\ 0\\ -\beta\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}\beta\\ 0\\ -\beta\end{pmatrix}$$

il che dimostra che *ogni vettore della forma* $(\beta,0,-\beta)$ *è effettivamente un autovettore di* A *relativo all'autovalore* 1: così abbiamo l'inclusione $V_1'\subseteq V_1$.

N.B.: d'altra parte, si noti invece che ciò che abbiamo fatto *non* dimostra però il viceversa, cioè che *"ogni autovettore di* A *relativo all'autovalore* 1 *è un vettore della forma* $(\beta,0,-\beta)$". In altri termini, *non* abbiamo provato (anche) l'inclusione inversa $V_1'\supseteq V_1$, e quindi *non* possiamo (ancora) concludere che valga l'uguaglianza $V_1'=V_1$.

Sempre col calcolo diretto troviamo anche, per ogni $\gamma\in\mathbb{R}$,

$$A\cdot\begin{pmatrix}\gamma\\ -2\,\gamma\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\gamma\\ -2\,\gamma\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma+2\,\gamma+0\\ -\gamma-4\,\gamma-\gamma\\ 0+2\,\gamma+\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\,\gamma\\ -6\,\gamma\\ 3\,\gamma\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}\gamma\\ -2\,\gamma\\ \gamma\end{pmatrix}$$

il che prova che *ogni vettore della forma* $(\gamma,-2\,\gamma,\gamma)$ *è effettivamente un autovettore di* A *relativo all'autovalore* 3: perciò abbiamo l'inclusione $V_3'\subseteq V_3$.

N.B.: d'altra parte, quanto appena fatto *non* dimostra però il viceversa, cioè che *"ogni autovettore di* A *relativo all'autovalore* 3 *è un vettore della forma* $(\gamma,-2\,\gamma,\gamma)$". In altre parole, *non* abbiamo provato (anche) l'inclusione inversa $V_3' \supseteq V_3$, e quindi *non* possiamo (ancora) concludere che valga l'uguaglianza $V_3' = V_3$.

Riassumendo, abbiamo trovato che

$$V_0' \subseteq V_0 \quad , \qquad V_1' \subseteq V_1 \quad , \qquad V_3' \subseteq V_3 \tag{17}$$

che ovviamente implica anche

$$dim\big(V_0'\big) \leq dim\big(V_0\big) \quad , \qquad dim\big(V_1'\big) \leq dim\big(V_1\big) \quad , \qquad dim\big(V_3'\big) \leq dim\big(V_3\big) \tag{18}$$

Ora, è chiaro dalle definizioni che ciascuno dei sottospazi V_i' ha dimensione 1 (perché ha per base $B_i := \{v_i\}$, vedi sopra!). Inoltre, osserviamo che se $v_i' \in V_i' \setminus \{\underline{0}\}$ $(i = 0, 1, 3)$ allora *i vettori* v_0' , v_1' , v_3' *sono linearmente indipendenti.* Da queste due osservazioni segue subito che il sottospazio (di V)

$$V' \; := \; V_0' + V_1' + V_3' \; = \; \big\{ v_0' + v_1' + v_3' \;\big|\; v_i' \in V_i' \setminus \{\underline{0}\} \, , \, \forall \, i = 0, 1, 3 \big\}$$

ha dimensione 3. Considerando ora il sottospazio (di V)

$$V_0 + V_1 + V_3 \; := \; \big\{ v_0 + v_1 + v_3 \;\big|\; v_i \in V_i \setminus \{\underline{0}\} \, , \, \forall \, i = 0, 1, 3 \big\}$$

abbiamo ovviamente

$$3 \; = \; dim\big(V'\big) \; = \; dim\big(V_0' + V_1' + V_3'\big) \; \leq \; dim\big(V_0 + V_1 + V_3\big) \; = \; dim\big(V\big) \; = \; 3$$

e perciò abbiamo necessariamente $dim\big(V_0' + V_1' + V_3'\big) = dim\big(V_0 + V_1 + V_3\big)$. Da questo, insieme alla (17) e alla (18), deduciamo che necessariamente $dim\big(V_i'\big) = dim\big(V_i\big)$ per ogni $i \in \{0, 1, 3\}$, e quindi in conclusione $V_i' = V_i$ per ogni $i \in \{0, 1, 3\}$, cioè vale effettivamente la (16).

N.B.: l'argomentazione che abbiamo usato per dimostrare che $V_i' = V_i$ per ogni $i \in \{0, 1, 3\}$ — sapendo $V_i' \subseteq V_i$ per ogni $i \in \{0, 1, 3\}$ — è esattamente la stessa che si usa in generale per dimostrare che se il numero di autovalori (distinti) è pari alla dimensione dello spazio, allora l'endomorfismo in esame è diagonalizzabile. $\diamondsuit$

Infine, ora che conosciamo gli autospazi di A, possiamo verificare che essi sono effettivamente a due a due ortogonali: in formule, $V_i \perp V_j$ per ogni $i, j \in Sp(A)$, $i \neq j$. Infatti, abbiamo

$$V_i \perp V_j \quad \Longleftrightarrow \quad v_i' \perp v_j' \;\; \big(\forall \, v_i' \in V_i \, , \, v_j' \in V_j \big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big\langle v_i' \, , \, v_j' \big\rangle = 0 \;\; \big(\forall \, v_i' \in V_i \, , \, v_j' \in V_j \big)$$

$(\forall \; i, j \in Sp(A) \, , \, i \neq j \,)$, dove il simbolo $\big\langle \; , \; \big\rangle$ indica il prodotto scalare canonico in $V := \mathbb{R}^3$. Ora, dalle formule (13), (14) e (15) e dal calcolo diretto otteniamo

$$\big\langle v_0' \, , \, v_1' \big\rangle = \big\langle (\alpha, \alpha, \alpha) \, , \, (\beta, 0, -\beta) \big\rangle = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot (-\beta) = \alpha \, \beta - \alpha \, \beta = 0$$
$$\big\langle v_0' \, , \, v_3' \big\rangle = \big\langle (\alpha, \alpha, \alpha) \, , \, (\gamma, -2\,\gamma, \gamma) \big\rangle = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot (-2\,\gamma) + \alpha \cdot \gamma = \alpha \, \gamma - 2\, \alpha \, \gamma + \alpha \, \gamma = 0$$
$$\big\langle v_1' \, , \, v_3' \big\rangle = \big\langle (\beta, 0, -\beta) \, , \, (\gamma, -2\,\gamma, \gamma) \big\rangle = \beta \cdot \gamma + 0 \cdot (-2\,\gamma) + (-\beta) \cdot \gamma = \beta \, \gamma - \beta \, \gamma = 0$$

per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, e questo ci permette di concludere che i tre autospazi V_0 , V_1 e V_3 sono effettivamente a due a due ortogonali.

(c) Ricordiamo che una *base diagonalizzante* per la matrice A è una qualsiasi base (dello spazio $V := \mathbb{R}$) $B = \{b, b', b''\}$ rispetto alla quale l'endomorfismo $L_A\left(\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}\right)$ associato ad A sia espresso da una matrice diagonale, diciamo

$$D = diag\left(\lambda\,,\,\lambda'\,,\,\lambda''\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

In tal caso, *i coefficienti sulla diagonale della matrice (diagonale) D sono autovalori di A*, e *gli elementi della base (diagonalizzante) B sono autovettori di A*: precisamente b è autovettore con autovalore λ, b' è autovettore con autovalore λ', e b'' è autovettore con autovalore λ''.

Nel caso in esame, gli autovalori sono $\lambda = 0$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 3$, (l'ordine in cui prenderli è arbitrario: lo scegliamo noi!). Come autovettori della base diagonalizzante B possiamo prendere gli autovettori $b = v_0 := (1,1,1)$, $b' = v_1 := (1,0,-1)$, e $b'' = v_3 := (1,-2,1)$ già considerati in precedenza. Quindi una possibile base diagonalizzante per A è data da

$$B = \{v_0\,,\,v_1\,,\,v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{19}$$

<u>*NOTA*</u>*:* in aggiunta a quanto già visto — anche se per questo esercizio *non ci serve...* — ricordiamo che si dice *matrice diagonalizzante* per la matrice A la matrice $C := C_{B_{\underline{E}} \mapsto B}$ del cambiamento di base dalla base canonica (di $V := \mathbb{R}$) $B_{\underline{E}}$ ad una base diagonalizzante B. Con la notazione di prima, si ha dunque

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C \tag{20}$$

che a sua volta è equivalente all'identità

$$C \cdot D = A \cdot C \tag{21}$$

Dalla teoria generale, sappiamo allora che la matrice $C := C_{B_{\underline{E}} \mapsto B}$ del cambiamento di base (da $B_{\underline{E}}$ a B) è la matrice che ha per colonne i vettori della base B, cioè

$$C := C_{B_{\underline{E}} \mapsto B} = \left(b\,\middle|\,b'\middle|\,b''\right) = \left(v_0\middle|v_1\middle|v_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Volendo, a questo punto si potrebbe verificare che l'identità (20), oppure la (21), sia effettivamente soddisfatta: siccome la verifica della (20) richiede il calcolo dell'inversa della matrice C (cioè un'operazione in più!...), procediamo invece a verificare la (21). Il calcolo diretto ci dà

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e analogamente anche

$$A \cdot C \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e così troviamo proprio $C \cdot D = A \cdot C$, cioè la (21) è verificata. $\diamondsuit$

Abbiamo dunque trovato che l'insieme B di tre vettori dato in (19) è una base diagonalizzante In aggiunta, osserviamo che essa è formata da autovettori, tutti relativi ad autovalori diversi, cioè contenuti ciascuno in un autospazio diverso dagli altri. Siccome abbiamo già dimostrato — per la parte *(b)* — che gli autospazi sono a due a due ortogonali, possiamo dedurne che anche gli elementi della base B sono a due a due ortogonali.

Perciò la base diagonalizzante B è anche *ortogonale*.

A questo punto, per ottenere una base diagonalizzante orto*normale* ci basta *normalizzare* la base B, cioè modificare ciascuno dei suoi elementi moltiplicandolo per l'inverso della rispettiva norma. Tali norme sono

$$\begin{aligned} \|v_0\| \;&:=\; \|(1,1,1)\| \;=\; \sqrt{1^2+1^2+1^2} \;=\; \sqrt{1+1+1} \;=\; \sqrt{3} \\ \|v_1\| \;&:=\; \|(1,0,-1)\| \;=\; \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} \;=\; \sqrt{1+0+1} \;=\; \sqrt{2} \\ \|v_3\| \;&:=\; \|(1,-2,1)\| \;=\; \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} \;=\; \sqrt{1+4+1} \;=\; \sqrt{6} \end{aligned}$$

e quindi, in conclusione, una base diagonalizzante ortonormale del tipo richiesto è data da

$$B_{on} = \left\{ \|v_0\|^{-1} v_0 \,,\, \|v_1\|^{-1} v_1 \,,\, \|v_3\|^{-1} v_3 \right\} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\} \qquad \square$$