GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2010/2011

prof. Fabio GAVARINI

Esonero del 15 Febbraio 2011

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] Si consideri lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$, e in esso siano $\underline{e}_1 := (1,0,0)$, $\underline{e}_2 := (0,1,0)$, $\underline{e}_3 := (0,0,1)$ i vettori della base canonica. Siano poi $T' : V \longrightarrow V$ e $T'' : V \longrightarrow V$ gli endomorfismi di V tali che

$$T' : \begin{cases} \underline{e}_1 \mapsto T'(\underline{e}_1) := \underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 + 6\,\underline{e}_3 \\ \underline{e}_2 \mapsto T'(\underline{e}_2) := -3\,\underline{e}_1 - 5\,\underline{e}_2 - 6\,\underline{e}_3 \\ \underline{e}_3 \mapsto T'(\underline{e}_3) := 3\,\underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 + 4\,\underline{e}_3 \end{cases}$$

e, rispettivamente,

$$T'' : \begin{cases} \underline{e}_1 \mapsto T''(\underline{e}_1) := -3\,\underline{e}_1 - 7\,\underline{e}_2 - 6\,\underline{e}_3 \\ \underline{e}_2 \mapsto T''(\underline{e}_2) := \underline{e}_1 + 5\,\underline{e}_2 + 6\,\underline{e}_3 \\ \underline{e}_3 \mapsto T''(\underline{e}_3) := -\underline{e}_1 - \underline{e}_2 - 2\,\underline{e}_3 \end{cases}$$

(a) Determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di T' e di T'' .

(b) Determinare (giustificando le conclusioni) se T' e T'' siano diagonalizzabili o no.

[2] Dato lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$, si considerino la funzione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definita — per ogni $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in V := \mathbb{R}^3$ — dalla formula

$$g\big(\underline{x}, \underline{y}\big) := -x_1 y_1 + 6\,x_1 y_2 + 6\,x_2 y_1 + 3\,x_1 y_3 + 3\,x_3 y_1 - 15\,x_2 y_2 - 3\,x_2 y_3 - 3\,x_3 y_2 + 2\,x_3 y_3$$

Dimostrare che:

(a) g è una forma bilineare.

(b) g è simmetrica.

(c) g è non degenere.

(d) g non è definita positiva.

[**3**] Si consideri la matrice

$$A \ := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ \in \ Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Dimostrare che A è diagonalizzabile.

(b) Dimostrare che gli autospazi di A sono — come sottospazi di $V := \mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare canonico — a due a due ortogonali.

(c) Determinare una base diagonalizzante di A che sia ortonormale.