GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2011/2012

prof. Fabio GAVARINI

Esonero del 14 Dicembre 2011 — COMPITO **A**

....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

ATTENZIONE

Siete FORTEMENTE INVITATI a NON far uso della nozione di determinante, come di tutte le nozioni e risultati ad essa collegati (ad esempio: Teorema di Cramer, Teorema degli Orlati, formula esplicita per l'inversa di una matrice invertibile, ecc. ecc.)

.... $*$ ....

[1] Si considerino la matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e il vettore $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ dati da

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \underline{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Determinare se la matrice A sia invertibile. In caso affermativo, calcolare la matrice inversa A^{-1}; in caso negativo, calcolare il nucleo $Ker(A)$ della matrice A.

(b) Risolvere il sistema lineare $\circledast : A \cdot \underline{x} = \underline{b}$.

[2] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ si consideri il corrispondente sottospazio $W(k) := Span\big(w_1(k), w_2(k), w_3(k), w_4(k)\big)$ generato dai quattro vettori

$$w_1(k) := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad w_2(k) := \begin{pmatrix} k-2 \\ 2-k \\ 0 \\ 2k-4 \end{pmatrix} , \quad w_3(k) := \begin{pmatrix} 2k+1 \\ 3-k \\ k-1 \\ 3k-2 \end{pmatrix} , \quad w_4(k) := \begin{pmatrix} 3k+1 \\ 6-2k \\ k-3 \\ 6k-1 \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di $W(k)$.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare una base di $W(k)$.

[3] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{R}$ aventi grado al più 2, si considerino i due gruppi tre vettori (polinomi)

$$p_1(x) := -x^2 + 2\,x \quad , \qquad p_2(x) := 3\,x^2 + 2\,x - 2 \quad , \qquad p_3(x) := -2\,x + 1 \quad ,$$
$$q_1(x) := x^2 + 3 \quad , \qquad q_2(x) := 2\,x^2 - x + 1 \quad , \qquad q_3(x) := -x^2 + 5\,x \quad .$$

(a) Determinare se gli insiemi $P := \big\{p_i(x)\big\}_{i=1,2,3;}$ e $Q := \big\{q_j(x)\big\}_{j=1,2,3;}$ siano basi di $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ oppure no.

(b) Nel caso in cui la risposta al punto *(a)* sia negativa, cioè se almeno un insieme tra P e Q *non* è una base, determinare esplicitamente una relazione di dipendenza lineare non banale tra i vettori di tale insieme. In caso affermativo invece, cioè se entrambi gli insiemi P e Q sono basi, determinare la matrice $C_{P \mapsto Q}$ del cambiamento di base da P a Q.