GEOMETRIA I modulo
CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2009/2010
prof. Fabio GAVARINI
Esonero del 4 Dicembre 2009

Svolgimento completo

· · · · · · · · · $*$ · · · · · · · · ·

N.B.: lo svolgimento qui presentato è chilometrico... Questo non vuol dire *che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si è colta l'occasione per spiegare — anche in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con dovizia di particolari tutti gli aspetti della teoria toccati in maggiore o minore misura dal testo in esame.*

[1] Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice $A \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Calcolare il rango di L_A .

(b) Determinare un base di $Ker(L_A)$ e una base di $Im(L_A)$.

(c) Determinare se il vettore $w := (1,0,0,0)^T$ appartenga al sottospazio $Im(L_A)$.

<u>*Soluzione*</u>: *(a)* Per teoria generale, il rango dell'applicazione lineare L_A è uguale al rango della matrice A ; inoltre, il rango di A è uguale al rango di una sua qualunque riduzione a scala, cioè di una qualsiasi matrice *a scala* S_A ottenuta da A tramite un processo di riduzione a scala.

Pertanto, usando l'algoritmo di eliminazione di Gauss, riduciamo la matrice A in forma a scala (superiore), come segue:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 1\cdot \mathrm{I}]{}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 1\cdot \mathrm{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + (-2^{-1})\cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} + (-2^{-1})\cdot \mathrm{II}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_A$$

L'ultima matrice S_A in fondo a destra è in forma a scala (superiore); i suoi pivot (:= primi elementi non nulli sulle varie righe) sono 1 e 4 . Ne segue che il rango di S_A — pari al numero di pivot di S_A — è esattamente 2 . Infine, per quanto detto in partenza il rango di L_A è uguale al rango di S_A , dunque è uguale a 2 .

(b) Dalla teoria generale sappiamo che $dim\big(Im(L_A)\big) =: rg\,(L_A) = rg\,(A)$. Poiché $rg\,(A) = 2$, abbiamo quindi che $dim\big(Im(L_A)\big) = 2$: perciò ogni base di $Im(L_A)$ avrà esattamente due elementi.

Ora, i pivot della matrice (a scala) S_A stanno sulle colonne 1 e 2 . Perciò i *vettori iniziali* che nella matrice *iniziale* A stavano nelle (cioè costituivano le) colonne 1 e 2 formano una base del sottospazio $Im(L_A)$ di $\mathbb{R}^4$. In altre parole, una base di $Im(L_A)$ è data da $\big\{(0,-1,1,0)^T,\,(2,3,1,2)^T\big\}$.

Per quanto riguarda le basi di $Ker\,(L_A)$, osserviamo innanzitutto che il *Teorema della Dimensione* dà $\;dim\big(Ker\,(L_A)\big) + dim\big(Im(L_A)\big) = dim\big(\mathbb{R}^3\big) = 3$, e quindi

$$dim\big(Ker\,(L_A)\big) \;=\; 3 \,-\, dim\big(Im(L_A)\big) \;=\; 3 \,-\, 2 \;=\; 1$$

perciò ogni base di $Ker\,(L_A)$ avrà esattamente un elemento.

Per determinare una base esplicita di $Ker\,(L_A)$ procediamo prima a *descrivere* $Ker\,(L_A)$, che è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Ora, per definizione si ha

$$Ker\,(L_A) \;:=\; \Big\{\, \underline{x} := (x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, L_A(\underline{x}) = \underline{0} := (0,0,0,0)^T \,\Big\}$$

perciò, siccome $L_A(\underline{x}) := A \cdot \underline{x}$, gli elementi di $Ker\,(L_A)$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema *omogeneo* di equazioni lineari $\circledast_A\Big\{A \cdot \underline{x} = \underline{0}$, costituito da quattro equazioni in tre incognite.

Per risolvere il sistema $\circledast_A$ bisogna ridurlo a scala, cioè bisogna ridurre in forma a scala la sua matrice completa $\big(A\,\big|\,\underline{0}\big)$. Ora, in questa matrice l'ultima colonna — che è a colonna dei termini noti del sistema $\circledast_A$ — è composta tutta di zeri, quindi nel processo di riduzione a scala, qualunque esso sia, il risultato finale sarà comunque una matrice (a scala) in cui l'ultima colonna è ancora composta tutta di zeri. Per il resto, per ridurre a scala la matrice completa $\big(A\,\big|\,\underline{0}\big)$ le operazioni da fare sulle colonne dalla prima alla penultima — cioè le colonne di A — sono *esattamente le stesse* che si compiono per ridurre a scala la sola matrice A . In conclusione, alla luce di questo la riduzione a scala di $\big(A\,\big|\,\underline{0}\big)$ sarà $\big(S_A\,\big|\,\underline{0}\big)$.

Ora, il sistema $\circledast_A$ è equivalente, per costruzione, alla sua riduzione a scala $\circledast_{S_A}\Big\{S_A \cdot \underline{x} = \underline{0}$, quindi risolviamo quest'ultimo: poiché esso si riduce a $\circledast_{S'_A}\begin{cases} x_1 \,+\, x_2 \;=\; 0 \\ 4\,x_2 \,+\, 2\,x_3 \;=\; 0 \end{cases}$, fissando x_3 come parametro libero otteniamo che l'insieme delle soluzioni di $\circledast_{S'_A}$, cioè il sottospazio $Ker\,(L_A)$ cercato, è

$$Ker\,(L_A) \;=\; \Big\{\,(\alpha/2\,,-\alpha/2\,,\alpha)\,\Big|\,\alpha\in\mathbb{R}\,\Big\} \;=\; \Big\{\,(a\,,-a\,,2\,a)\,\Big|\,a\in\mathbb{R}\,\Big\}$$

Da questa descrizione esplicita risulta che $dim\big(Ker\,(L_A)\big) = 1$, come già avevamo previsto per il Teorema della Dimensione, e ogni possibile base di $Ker\,(L_A)$ sarà composta di un singolo vettore *non nullo* di $Ker\,(L_A)$, dunque corrispondente ad uno specifico valore (non nullo) del parametro α oppure del parametro a . Ad esempio, scegliendo $a = 1$ (che corrisponde a $\alpha = 2$) si ottiene il vettore $(1\,,-1\,,2)^T$, e quindi l'insieme $\big\{(1\,,-1\,,2)^T\big\}$ che è una base di $Ker\,(L_A)$. Oppure, scegliendo $\alpha = 1$ (che corrisponde a $a = 1/2$) si ottiene il vettore $(1/2\,,-1/2\,,1)^T$, e quindi l'insieme $\big\{(1/2\,,-1/2\,,1)^T\big\}$ che è un'altra base di $Ker\,(L_A)$.

(c) Dalla teoria generale sappiamo che il sottospazio $Im(L_A)$ è generato — come sottospazio di $\mathbb{R}^4$ — dalle colonne della matrice A ; in altre parole, $Im(L_A) = Span\big(A^1,A^2,A^3\big)$, dove A^j indica la colonna j–esima ($j = 1,2,3$) della matrice A . Perciò il vettore $w := (1,0,0,0)^T$ appartiene a $Im(L_A)$ se e soltanto se $Span\big(A^1,A^2,A^3,w\big) = Span\big(A^1,A^2,A^3\big)$. Inoltre, poiché è sempre $Span\big(A^1,A^2,A^3,w\big) \supseteq Span\big(A^1,A^2,A^3\big)$ — perché il sottospazio di sinistra è generato da un

insieme di generatori che include un insieme di generatori del sottospazio di destra — abbiamo certamente $dim\big(Span(A^1,A^2,A^3,w)\big) \geq dim\big(Span(A^1,A^2,A^3)\big)$, e in aggiunta si ha

$$Span\big(A^1,A^2,A^3,w\big) = Span\big(A^1,A^2,A^3\big) \iff dim\big(Span\big(A^1,A^2,A^3,w\big)\big) \geq dim\big(Span\big(A^1,A^2,A^3\big)\big)$$

cioè l'uguaglianza tra i due sottospazi si verifica se e soltanto se si verifica l'uguaglianza tra le loro dimensioni. Infine, abbiamo anche

$$dim\big(Span\big(A^1,A^2,A^3,w\big)\big) = rg\big(A^1\big|A^2\big|A^3\big|w\big) \quad , \qquad dim\big(Span\big(A^1,A^2,A^3\big)\big) = rg\big(A^1\big|A^2\big|A^3\big)$$

quindi in definitiva dobbiamo confrontare i due numeri $rg\big(A^1\big|A^2\big|A^3\big|w\big)$ e $rg\big(A^1\big|A^2\big|A^3\big)$, cioè il rango della matrice $\big(A\,\big|\,w\big)$ e il rango della matrice A. Ora, la prima matrice si ottiene dalla seconda affiancandole (a destra) un'ulteriore colonna, data dal vettore w. Pertanto, volendo ridurre a scala la matrice $\big(A\,\big|\,w\big)$ le operazioni da effettuare sono esattamente le stesse che per la matrice A — che abbiamo già svolto! — tranne per un ultimo passaggio aggiuntivo che operi (se e nella misura in cui sia necessario) sulla nuova colonna aggiuntiva, la quarta. Riprendendo allora i calcoli già fatti, li "estendiamo" anche alla nuova colonna aggiuntiva, e otteniamo quanto segue:

$$\big(A\,\big|\,w\big) := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\text{II} \mapsto \text{II} + 1\cdot\text{I}]{}$$

$$\xRightarrow[\text{II} \mapsto \text{II} + 1\cdot\text{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{\text{III} \mapsto \text{III} + (-2^{-1})\cdot\text{II} \\ \text{IV} \mapsto \text{IV} + (-2^{-1})\cdot\text{II}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \big(S_A\,\big|\,w'\,\big)$$

dove $w' := (0,1,1,0)^T$. Ora, l'ultima matrice $S_{(A\,|\,w)} := \big(S_A\,\big|\,w'\,\big)$ è a sua volta in forma a scala, con tre pivot, precisamente 1, 4 e 2 rispettivamente in colonna 1, 2 e 4. Così in definitiva abbiamo

$$rg\big(A^1\big|A^2\big|A^3\big|w\big) = rg\big(A\,\big|\,w\big) = rg\big(S_{(A\,|\,w)}\big) = 3 \gneqq 2 = rg\big(A\big) = rg\big(A^1\big|A^2\big|A^3\big)$$

e quindi, per quanto già visto, concudiamo che $w \notin Im(L_A)$.

<u>N.B.</u>: ovviamente, si poteva procedere *fin dall'inizio* ad effettuare questa riduzione a scala della matrice $\big(A\,\big|\,w\big)$: si sarebbe così ottenuto, in un colpo solo, che $rg\,(L_A) = rg\,(A) = 2$, per risolvere il punto *(a)*, e che $rg\big(A\,\big|\,w\big) = 3$, che ci consente — come visto — di risolvere *(c)*. $\square$

(continua...)

[2] Si consideri la matrice
$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Calcolare il rango di M .

(b) Determinare se la matrice M sia invertibile oppure no.

(c) Se M è invertibile, si calcoli la matrice inversa M^{-1} ; inoltre, si verifichi esplicitamente — effettuando gli opportuni calcoli di prodotti righe per colonne — che la matrice ottenuta soddisfi effettivamente le proprietà richieste alla matrice inversa.

Se invece M non è invertibile, si determini l'insieme di tutti i $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $M\,v = (0,0,0,0)^T$.

<u>*Soluzione:*</u> Il rango della matrice M è uguale al rango di una sua qualunque riduzione a scala S_M ; perciò riduciamo M a scala (superiore), tramite eliminazione di Gauss, come segue:

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 3\cdot\mathrm{I}}]{}$$
$$\xRightarrow[\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 3\cdot\mathrm{I}}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio II} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 2\cdot\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =: S_M$$

L'ultima matrice S_M in fondo a destra è in forma a scala (superiore); i suoi pivot (:= primi elementi non nulli sulle varie righe) sono -1 , 1 e 9 ; ne segue che il rango di M — pari al rango di S_M , che è uguale al numero di pivot di S_M — è 3 . Questo risolve il punto *(a)*.

Inoltre, poichè M è una matrice quadrata 3×3 , per teoria generale da $rg(M) = 3$ segue anche che M è invertibile, il che risolve il punto *(b)*.

In alternativa, si può procedere così. Sappiamo che una matrice quadrata — quale è M — è invertibile se e soltanto se il suo rango è massimo (pari all'ordine della matrice), e questo a sua volta avviene se e soltanto se il suo determinante è diverso da zero. Pertanto, possiamo calcolare il determinante di M , e cercare di trarne le debite conclusioni.

Se troveremo $det(M) \neq 0$, allora potremo concludere che $rg(M) = 3$ e che M è invertibile, risolvendo così i punti *(a)* e *(b)*. Se invece troveremo $det(M) = 0$, allora potremo concludere che $rg(M) \lneqq 3$ e che M non è invertibile, risolvendo così il punto *(b)* ma *non* il punto *(a)*.

Dato che M ha ordine 3, per calcolare $det(M)$ possiamo usare la regola di Sarrus: questo ci dà

$$det(M) = det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot(-2)\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 0 =$$
$$= -6 - 1 + 0 - 0 - 2 - 0 = -9 \neq 0$$

dunque $det(M) = 9 \neq 0$, e si conclude che $rg(M) = 3$ e che M è invertibile.

Altrimenti, si può calcolare $det(M)$ tramite uno sviluppo di Laplace. Nel caso in esame — cioè per *questa* specifica matrice — converrà fare uno sviluppo lungo la prima o la terza riga, oppure uno lungo la seconda o la terza colonna: questi infatti sono tutti e soli i casi in cui si trova (sulla riga o colonna) qualche coefficiente pari a zero (di fatto, soltanto uno). Ad esempio, lo sviluppo lungo la prima riga dà

$$det(M) \;=\; det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=$$

$$= \;(-1)^{1+1}\cdot 3\cdot det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;+\; (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;+\; (-1)^{1+3}\cdot 0\cdot det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;=$$

$$= \;3\cdot det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 3\cdot\big((-2)\cdot 1 - 1\cdot 0\big) - \big(2\cdot 1 - (-1)\cdot 1\big) \;=\; -9$$

così che ritroviamo che $det(M) = -9 \neq 0$, e concludiamo come prima.

Infine, $det(M)$ si può calcolare ancora in un altro modo. Precisamente, ricordiamo che per ogni matrice quadrata A si ha $det(A) = (-1)^\sigma \prod_{i=1}^n t_{i,i}$ dove i fattori $t_{i,i}\,(i = 1, \dots, n)$ sono i coefficienti sulla diagonale di una qualsiasi riduzione a forma triangolare (superiore o inferiore) T_A della matrice A e σ è il numero di scambi di righe operati nel processo di riduzione a forma triangolare che porta da A a T_A .

Infatti, tale riduzione si fa tramite scambi di righe o operazioni elementari (sulle righe): la prima operazione cambia segno al determinante, la seconda invece non lo cambia proprio; quindi $det(A) = (-1)^\sigma det(T_A)$. Inoltre, il determinante di una matrice triangolare (superiore o inferiore) è sempre uguale al prodotto dei coefficienti sulla sua diagonale (principale): in altre parole $det(T_A) = \prod_{i=1}^n t_{i,i}$. Da queste due osservazioni segue appunto che $det(A) = (-1)^\sigma \prod_{i=1}^n t_{i,i}$.

Nel caso in esame — cioè per $A := M$ — abbiamo $T_M = S_M$ e $\sigma = 2$, quindi (ri)troviamo

$$det(M) \;=\; (-1)^2\,(-1)\cdot 1\cdot 9 \;=\; -9$$

N.B.: naturalmente, se si riduce M a forma *triangolare*, allora con un minimo sforzo in più — che può anche essere *nullo*, come nel caso in esame — si può arrivare ad una riduzione *a scala*. Allora le informazoni che "leggiamo" dai pivot ci dicono direttamente *tutto* sul rango e sull'invertibilità o meno di M , senza bisogno di sapere il determinante! In particolare, come già osservato, questo ci consente di risolvere completamente i quesiti *(a)* e *(b)*, indipendentemente dal valore del determinante (in particolare, anche quando quest'ultimo fosse zero).

Ci resta ora da risolvere soltanto il punto *(c)*. Per quanto già risposto al punto *(b)*, la matrice M è invertibile, quindi ora dobbiamo calcolare la matrice inversa M^{-1}, e dobbiamo verificare esplicitamente che sia effettivamente la matrice inversa. Questo significa che, indicando con I_3 la matrice identità di ordine 3 , la matrice M^{-1} calcolata deve soddisfare la condizione $M\cdot M^{-1} = I_3$, oppure la condizione $M^{-1}\cdot M = I_3$; come è noto, una delle due condizioni implica l'altra.

Per calcolare M^{-1} procediamo con l'algoritmo standard.

Precisamente, cominciamo affiancando alla matrice M la matrice I_3 (formando così una matrice 3×6), e poi riduciamo a scala (superiore) la parte sinistra — cioè le prime tre colonne — della matrice $\big(M \,\big|\, I_3\big)$ così ottenuta. Il risultato sarà una matrice $\big(S_M \,\big|\, M'\big)$ in cui S_M è una riduzione a scala (superiore) di M e M' è un'opportuna matrice quadrata di ordine 3.

Osserviamo che questa prima fase si effettua operando esattamente gli stessi passaggi svolti per ridurre a scala la matrice M , salvo che adesso però le medesime operazioni devono essere effettuate sulla matrice "estesa" $\big(M \,\big|\, I_3\big)$, cioè devono essere estese anche alle tre colonne aggiuntive che sono state affiancate a M . Operando in questo modo si ottiene

$$
\begin{aligned}
\big(M \,\big|\, I_3\big) :=& \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \big| & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & \big| & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \big| & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \big| & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & \big| & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \big| & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 2\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 3\cdot \mathrm{I}}]{} \\
\xRightarrow[\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 2\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 3\cdot \mathrm{I}}]{}& \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \big| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & \big| & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & \big| & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio II} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \big| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \big| & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & \big| & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 2\cdot \mathrm{II}]{} \\
&\xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 2\cdot \mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \big| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \big| & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & \big| & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \big(S_M \,\big|\, M'\big)
\end{aligned}
$$

Ora, nella matrice finale $\big(S_M \,\big|\, M'\big)$ la parte di sinistra, come abbiamo già osservato, ha tutti i coefficienti sulla diagonale diversi da zero. Pertanto, se operiamo una eliminazione di Gauss all'insù — cioè dal basso in alto — possiamo prendere proprio tali coefficienti come pivot, e ridurre così S_M a forma triangolare inferiore: e siccome S_M a sua volta è triangolare superiore, il risultato sarà una matrice *diagonale* D_M , i cui coefficienti non banali — cioè quelli sulla diagonale — saranno appunto tali pivot. In sintesi, otterremo

$$
D_M \;=\; \mathit{diag}\,(-1,1,9) \;:=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}
$$

Effettuiamo allora le operazioni necessarie a ridurre S_M alla forma D_M , ma *estendole a tutta la matrice* $\big(S_M \,\big|\, M'\big)$: il risultato sarà una matrice $\big(D_M \,\big|\, M''\big)$, in cui M'' sarà un'opportuna matrice quadrata di ordine 3. Esplicitamente, svolgendo tale operazione i calcoli ci danno

$$
\begin{aligned}
\big(S_M \,\big|\, M'\big) \;:=\;& \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \big| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \big| & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & \big| & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 3^{-1}\cdot \mathrm{III} \\ \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - 9^{-1}\cdot \mathrm{III}}]{} \\
&\xRightarrow[\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 3^{-1}\cdot \mathrm{III} \\ \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - 9^{-1}\cdot \mathrm{III}}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \big| & -2/9 & -1/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & \big| & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 9 & \big| & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \big(D_M \,\big|\, M''\big)
\end{aligned}
$$

Infine, dividiamo ciascuna riga della matrice $\big(D_M \,\big|\, M''\big)$ per il pivot — di S_M , o equivalentemente di D_M — che si trova su quella stessa riga: il risultato sarà una matrice $\big(I_3 \,\big|\, M^{-1}\big)$, in cui la matrice M^{-1} è proprio l'inversa cercata. Il calcolo esplicito ci dà

$$
\begin{aligned}
\big(D_M \,\big|\, M''\big) \;:=\;& \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \big| & -2/9 & -1/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & \big| & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 9 & \big| & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xRightarrow[\substack{\mathrm{II} \mapsto 1^{-1}\cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \mapsto 9^{-1}\cdot \mathrm{III}}]{\mathrm{I} \mapsto (-1)^{-1}\cdot \mathrm{I}} \\
&\xRightarrow[\substack{\mathrm{II} \mapsto 1^{-1}\cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \mapsto 9^{-1}\cdot \mathrm{III}}]{\mathrm{I} \mapsto (-1)^{-1}\cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \big| & 2/9 & 1/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & \big| & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & \big| & 2/9 & 1/9 & 8/9 \end{pmatrix} = \big(I_3 \,\big|\, M^{-1}\big)
\end{aligned}
$$

e quindi in particolare si ha

$$
M^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 & -1/9 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/9 & 1/9 & 8/9 \end{pmatrix}
$$

<u>N.B.:</u> ovviamente, si poteva procedere *fin dall'inizio* lavorando direttamente sulla matrice $\big(M\,\big|\,I_3\big)$ per dare risposta a *tutti* i quesiti in *(a)*, *(b)* e *(c)*. Operando come indicato qui sopra, un primo procedimento di riduzione a scala ci avrebbe portato a

$$\big(M\,\big|\,I_3\big) := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) =: \big(S_M\,\big|\,M'\big)$$

A questo punto, osservando la matrice S_M avremmo dedotto che $rg(M) = rg(M) = 3$ e quindi M è invertibile, risolvendo così i punti *(a)* e *(b)*. Inoltre avremmo anche concluso che da qui si può proseguire, procedendo al successivo processo di trasformazione da $\big(S_M\,\big|\,M'\big)$ a $\big(D_M\,\big|\,M''\big)$ e poi a $\big(I_3\,\big|\,M^{-1}\big)$ con il quale avremmo trovato la matrice inversa M^{-1} cercata.

In alternativa, si può calcolare M^{-1} usando la formula esplicita (ma è molto più macchinoso...). Precisamente, essa è data da

$$M^{-1} = \big(\mu_{i,j}\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;} \qquad \text{con} \qquad \mu_{i,j} := (-1)^{i+j}\, det\big(M_{j,i}\big)\cdot det(M)^{-1} \quad \forall\ i,j=1,\dots,n \qquad (\maltese)$$

dove $M_{j,i}$ indica la sottomatrice di M ottenuta cancellando (da M) la j–esima riga e la i–esima colonna (occhio allo scambio di indici!!!).

Nel caso in esame abbiamo $det(M) = -9$, quindi $det(M)^{-1} = (-9)^{-1} = -1/9$, e inoltre

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{2,2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{2,3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{3,3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Perciò, ricordando che $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$, si ha

$$\mu_{1,1} = det\big(M_{1,1}\big) = -2, \qquad \mu_{1,2} = det\big(M_{2,1}\big) = 1, \qquad \mu_{1,3} = det\big(M_{3,1}\big) = 1$$

$$\mu_{2,1} = det\big(M_{1,2}\big) = 3, \qquad \mu_{2,2} = det\big(M_{2,2}\big) = 3, \qquad \mu_{2,3} = det\big(M_{3,2}\big) = 3$$

$$\mu_{3,1} = det\big(M_{1,3}\big) = -2, \qquad \mu_{3,2} = det\big(M_{2,3}\big) = 1, \qquad \mu_{3,3} = det\big(M_{3,3}\big) = -8$$

Pertanto, da questi calcoli e da ($\maltese$) otteniamo

$$M^{-1} = (-1/9)\cdot \begin{pmatrix} +\mu_{1,1} & -\mu_{1,2} & +\mu_{1,3} \\ -\mu_{2,1} & +\mu_{2,2} & -\mu_{2,3} \\ +\mu_{3,1} & -\mu_{3,2} & +\mu_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 & -1/9 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/9 & 1/9 & 8/9 \end{pmatrix}$$

che è lo stesso risultato già ottenuto in precedenza.

Infine, dobbiamo verificare esplicitamente che la matrice M^{-1} che abbiamo calcolato sia effettivamente la matrice inversa di M (non basta *scrivere* il simbolo giusto perché una certa matrice sia quel che vogliamo...). Questo significa che *dobbiamo calcolare esplicitamente la matrice prodotto* *righe per colonne* $M \cdot M^{-1}$ *e verificare che sia* $M \cdot M^{-1} = I_3$ *, oppure la matrice prodotto righe per colonne* $M^{-1} \cdot M$ *e verificare che sia* $M^{-1} \cdot M = I_3$ (basta *una* delle due verifiche).

Per il primo prodotto, si ha

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 & -1/9 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/9 & 1/9 & 8/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2/9 + 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/9 & 3 \cdot 1/9 + 1 \cdot (-1/3) + 0 \cdot 1/9 & 3 \cdot (-1/9) + 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 8/9 \\ 2 \cdot 2/9 + (-2) \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/9 & 2 \cdot 1/9 + (-2) \cdot (-1/3) + 1 \cdot 1/9 & 2 \cdot (-1/9) + (-2) \cdot 1/3 + 1 \cdot 8/9 \\ (-1) \cdot 2/9 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/9 & (-1) \cdot 1/9 + 0 \cdot (-1/3) + 1 \cdot 1/9 & (-1) \cdot (-1/9) + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 8/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi effettivamente la matrice M^{-1} che abbiamo calcolato è corretta!

Per il secondo prodotto, il calcolo esplicito dà

$$M^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 & -1/9 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/9 & 1/9 & 8/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/9 \cdot 3 + 1/9 \cdot 2 + (-1/9) \cdot (-1) & 2/9 \cdot 1 + 1/9 \cdot (-2) + (-1/9) \cdot 0 & 2/9 \cdot 0 + 1/9 \cdot 1 + (-1/9) \cdot 1 \\ 1/3 \cdot 3 + (-1/3) \cdot 2 + 1/3 \cdot (-1) & 1/3 \cdot 1 + (-1/3) \cdot (-2) + 1/3 \cdot 0 & 1/3 \cdot 0 + (-1/3) \cdot 1 + 1/3 \cdot 1 \\ 2/9 \cdot 3 + 1/9 \cdot 2 + 8/9 \cdot (-1) & 2/9 \cdot 1 + 1/9 \cdot (-2) + 8/9 \cdot 0 & 2/9 \cdot 0 + 1/9 \cdot 1 + 8/9 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi ritroviamo conferma della correttezza del risultato che abbiamo ottenuto. $\square$

(continua...)

[3] Nello spazio vettoriale numerico $V := \mathbb{R}^3$, si considerino i vettori

$$v_1(k) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1-k \\ k-1 \end{pmatrix} \quad , \qquad v_2(k) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1-k \\ -k \end{pmatrix} \quad , \qquad v_3(k) := \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$$

dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Sia poi $V_k := \mathit{Span}\big(v_1(k), v_2(k), v_3(k)\big)$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v_1(k), v_2(k), v_3(k)$, per ciascun $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di V_k, estrarre una base B_k di V_k dall'insieme di generatori $\varGamma_k := \big\{v_1(k), v_2(k), v_3(k)\big\}$, e esprimere gli eventuali vettori rimanenti — cioè quei vettori di $\varGamma_k$ che *non* appartengano a B_k — come combinazione lineare dei vettori della base B_k.

Soluzione: Al variare dei valori di $k \in \mathbb{R}$, consideriamo la matrice

$$A_k := \big(v_1(k) \,\big|\, v_2(k) \,\big|\, v_3(k) \big) \in \mathit{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

che ha per colonne i vettori $v_1(k)$, $v_2(k)$ e $v_3(k)$. Allora, per trovare risposta alle tre domande poste, osserviamo prima di tutto che, per costruzione, si ha $\mathit{dim}(V_k) = \mathit{rg}\big(A_k\big)$. Inoltre, se riduciamo la matrice A_k in forma a scala, sia S_k, tramite eliminazione di Gauss, allora una base B_k di V_k estratta da $\varGamma_k$ si può ottenere prendendo le colonne di A_k che stiano nelle posizioni nelle quali si trovano le colonne di S_k contenenti i pivot (di S_k stessa). Procediamo dunque con l'eliminazione di Gauss: abbiamo

$$A_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1-k & 1-k & 0 \\ k-1 & -k & -k \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} k-1 & -k & -k \\ 1-k & 1-k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{II} \mapsto \text{II}+1\cdot\text{I}}$$

$$\xRightarrow{\text{II} \mapsto \text{II}+1\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} k-1 & -k & -k \\ 0 & 1-2k & -k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio II} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} k-1 & -k & -k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 1-2k & -k \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{III} \mapsto \text{III}+(2k-1)\text{II}}$$

$$\xRightarrow{\text{III} \mapsto \text{III}+(2k-1)\text{II}} \begin{pmatrix} k-1 & -k & -k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2\,k\,(k-1) \end{pmatrix} =: S'_k$$

che è una trasformazione valida per ogni $k \in \mathbb{R}$. Adesso distinguiamo tre casi:

(1) $k \neq 0$, $k \neq 1$: in questo caso, la matrice $S_k := S'_k$ a destra è appunto la riduzione di A_k in forma a scala. I suoi termini diagonali sono tutti diversi da zero, dunque sono i *pivot* di S_k, nelle colonne 1, 2 e 3. Ne segue che

$$\mathit{dim}(V_k) = \mathit{rg}\big(A_k\big) = 3 \quad , \qquad B_k = \varGamma_k := \big\{v_1(k), v_2(k), v_3(k)\big\} \quad , \qquad \forall\; k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \; .$$

(2) $k = 0$: In questo caso, $S_0 := S'_0$ è di nuovo in forma a scala; i suoi termini diagonali sono, nell'ordine, -1, 1 e 0: i primi due — diversi da zero — sono i *pivot* di S_0, che si trovano nelle colonne 1 e 2. Ne segue dunque che

$$\mathit{dim}(V_0) = \mathit{rg}\big(A_0\big) = 2 \quad , \qquad B_0 = \big\{v_1(0), v_2(0)\big\} = \big\{(0,1,-1)^T, (1,1,0)^T\big\} \quad .$$

Infine, per il vettore $v_3(0) \in \varGamma_0 \setminus B_0$ si ha $v_3(0) = (0,0,0)^T$, così ovviamente la sua unica espressione come combinazione lineare dei vettori della base B_0 (di V_0) è $v_3(0) = 0.v_1(0) + 0.v_2(0)$.

(3) $k=1$: in questo caso, la matrice S'_1 a destra *non* è (ancora) la riduzione di A_1 in forma a scala. Dobbiamo fare ancora un altro passo, così da ottenere

$$A_1 \implies S'_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\;\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}+1\cdot\mathrm{I}\;} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_1$$

Adesso l'ultima matrice S_1 è effettivamente la riduzione a scala di A_1, con un solo *pivot*, precisamente -1, che sta in colonna 2. Pertanto, ne segue che

$$dim(V_1) = rg\big(A_1\big) = 1 \quad , \qquad B_1 = \big\{v_2(1)\big\} = \big\{(1,0,-1)^T\big\} \quad .$$

Infine, per i vettori $v_1(1), v_3(1) \in \Gamma_1 \setminus B_1$ si ha $v_1(1) = (0,0,0)^T$ e $v_3(1) = (1,0,-1)^T$, mentre $v_2(1) = (1,0,-1)^T$. Perciò le loro espressioni come combinazioni lineari dei vettori della base $B_1 = \big\{v_2(1)\big\}$ (di V_0) sono rispettivamente, e ovviamente, $v_1(1) = 0.v_2(1)$, $v_3(1) = 1.v_2(1)$.

N.B.: ovviamente si possono seguire tanti altri procedimenti, più o meno equivalenti a quello spiegato qui sopra. Ad esempio, uno molto efficace è dato dalla variante — minima! — di quello già visto che adesso esponiamo.

Nell'insieme di generatori $\Gamma_k := \big\{v_1(k), v_2(k), v_3(k)\big\}$ del sottospazio V_k, *l'ordine* in cui si considerano i generatori stessi è irrilevante. Perciò, invece della matrice $A_k := \big(\, v_1(k) \,\big|\, v_2(k) \,\big|\, v_3(k) \,\big)$ considerata prima possiamo ora considerare la nuova matrice $A'_k := \big(\, v_2(k) \,\big|\, v_1(k) \,\big|\, v_3(k) \,\big) \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$, che differisce dalla precedente semplicemente per una permutazione delle colonne! Adesso possiamo svolgere con questa nuova matrice lo stesso procedimento di prima: in particolare, l'eliminazione di Gauss ci dà

$$A'_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1-k & 1-k & 0 \\ -k & k-1 & -k \end{pmatrix} \xRightarrow[\;\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}+k\,\mathrm{I}\;]{\;\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}+(k-1)\,\mathrm{I}\;} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1-k & k\,(k-1) \\ 0 & k-1 & k\,(k-1) \end{pmatrix} \xRightarrow{\;\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}+1\cdot\mathrm{II}\;}$$

$$\xRightarrow{\;\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}+1\cdot\mathrm{II}\;} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1-k & k\,(k-1) \\ 0 & 0 & 2\,k\,(k-1) \end{pmatrix} =: S''_k$$

che è una trasformazione — valida per ogni $k \in \mathbb{R}$ — che ci porta molto rapidamente (con meno passaggi di prima, certamente!) ad una matrice S''_k in forma a scala “o quasi” (a priori, dipende ancora dai valori di k, come prima). A questo punto proseguiamo come prima, distinguendo i tre casi possibili ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $k=0$, oppure $k=1$) e arriviamo alle stesse conclusioni! Si faccia attenzione però che adesso le posizioni dei pivot che si trovano determinano ancora delle colonne, ma queste corrispondono a vettori in Γ_k secondo una corrispondenza diversa da prima: per le nostre scelte di partenza infatti — cioè per come abbiamo costruito la matrice A'_k — la colonna 1 corrisponde al vettore $v_2(k)$, la colonna 2 al vettore $v_1(k)$, e infine la colonna 3 al vettore $v_3(k)$.