GEOMETRIA I modulo
CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2009/2010
Prof. Fabio GAVARINI
Esonero del 4 Dicembre 2009

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . ∗ . . . .

[1] Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice $A \in Mat_{4\times3}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Calcolare il rango di L_A .

(b) Determinare un base di $Ker(L_A)$ e una base di $Im(L_A)$.

(c) Determinare se il vettore $w := (1,0,0,0)^T$ appartenga al sottospazio $Im(L_A)$.

[2] Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Calcolare il rango di M .

(b) Determinare se la matrice M sia invertibile oppure no.

(c) Se M è invertibile, si calcoli la matrice inversa M^{-1} ; inoltre, si verifichi esplicitamente — effettuando gli opportuni calcoli di prodotti righe per colonne — che la matrice ottenuta soddisfi effettivamente le proprietà richieste alla matrice inversa.

Se invece M non è invertibile, si determini l'insieme di tutti i $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $M\,v = (0,0,0,0)^T$.

[3] Nello spazio vettoriale numerico $V := \mathbb{R}^3$, si considerino i vettori

$$v_1(k) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1-k \\ k-1 \end{pmatrix} , \qquad v_2(k) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1-k \\ -k \end{pmatrix} , \qquad v_3(k) := \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$$

dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Sia poi $V_k := Span\big(v_1(k), v_2(k), v_3(k)\big)$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v_1(k), v_2(k), v_3(k)$ (per ciascun $k \in \mathbb{R}$).

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di V_k , estrarre una base B_k di V_k dall'insieme di generatori $\Gamma_k := \big\{v_1(k), v_2(k), v_3(k)\big\}$, e esprimere gli eventuali vettori rimanenti — cioè quei vettori di Γ_k che *non* appartengano a B_k — come combinazione lineare dei vettori della base B_k .