GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2010/2011

prof. Fabio GAVARINI

Prova scritta del 23 Febbraio 2011

Svolgimento completo

.... $*$ ....

N.B.: lo svolgimento qui presentato è chilometrico... Questo non vuol dire *che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si è colta l'occasione per spiegare — anche in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con dovizia di particolari tutti gli aspetti della teoria toccati in maggiore o minore misura dal testo in esame.*

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si considerino i cinque vettori

$$u_1 := \big(3\,,\,-1\,,\,1\,,\,2\big)\ ,\quad u_2 := \big(2\,,-3\,,\,2\,,\,2\big)\ ,\quad u_3 := \big(1\,,\,2\,,\,-1\,,\,0\big)$$
$$u_4 := \big(0\,,7\,,\,-4\,,\,-2\big)\ ,\qquad u_5 := \big(7\,,-1\,,\,3\,,\,0\big)$$

il sottospazio vettoriale $U := Span(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ generato da tali vettori, e il vettore $v := \big(7\,,\,4\,,\,0\,,\,-2\big)$.

(a) Determinare la dimensione del sottospazio U.

(b) Estrarre dall'insieme $\big\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\big\}$ un suo sottoinsieme B_U che sia una base del sottospazio U.

(c) Estendere la base B_U di U trovata al punto *(b)* ad una base B di $V := \mathbb{R}^4$.

(d) Determinare se il vettore v sia contenuto, oppure no, nel sottospazio U.

<u>Soluzione</u>: *(a)-(b)-(c)-(d)* Dalla teoria generale, sappiamo che la dimensione del sottospazio $U := Span(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ è uguale al rango della matrice

$$M_U \;:=\; \big(\, u_1 \,\big|\, u_2 \,\big|\, u_3 \,\big|\, u_4 \,\big|\, u_5 \,\big)$$

che ha per colonne i generatori di U assegnati. Quindi il punto *(a)* si risolve calcolando il rango di tale matrice, ad esempio con un procedimento di riduzione a scala mediante eliminazione di Gauss (nel seguito abbreviato in "R.S."). Tale rango sarà pari al numero di pivot presenti nella matrice a scala S_U così ottenuta.

Il punto *(b)* chiede di estrarre dall'insieme $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dei generatori di U una base B_U di U stesso, cioè un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti in $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Possiamo risolvere tale problema operando una riduzione a scala sulla matrice M_U di cui sopra, e poi osservando in quali posizioni si trovino i pivot della matrice a scala S_U (come sopra) così ottenuta. I vettori in $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ che si trovino esattamente nelle stesse posizioni dei suddetti pivot formeranno la base B_U richiesta. Ovviamente, *questa procedura include anche quella esposta in precedenza per rispondere al quesito (a).*

Il punto *(c)* chiede di estendere la base B_U di cui in *(b)* ad una base B di $V := \mathbb{R}^4$. Per far questo, possiamo lavorare con l'insieme $\Gamma_4 := \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$, dove $\underline{e}_1 := (1,0,0,0)$, $\underline{e}_2 := (0,1,0,0)$, $\underline{e}_3 := (0,0,1,0)$, $\underline{e}_4 := (0,0,0,1)$ sono i vettori della base canonica $\underline{B}_4$ di $\mathbb{R}^4$. Infatti, Γ_4 è certamente un insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$, perché contiene la base $\underline{B}_4$: quindi possiamo estrarne una base con la solita procedura di riduzione a scala della matrice

$$\left(u_1 \,\middle|\, u_2 \,\middle|\, u_3 \,\middle|\, u_4 \,\middle|\, u_5 \,\middle|\, \underline{e}_1 \,\middle|\, \underline{e}_2 \,\middle|\, \underline{e}_3 \,\middle|\, \underline{e}_4 \right) = \left(M_U \,\middle|\, I_4 \right)$$

(esattamente come spiegato in precedenza per estrarre la base B_U dall'insieme dato di generatori di U), dove I_4 indica la matrice identità di ordine 4. Tale procedura "selezionerà" in Γ_4 vettori che siano linearmente indipendenti man mano che li trova "leggendo Γ_4 in sequenza", da sinistra a destra: in particolare, estrarrà dal sottoinsieme dei primi cinque vettori, cioè da $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti, che sarà proprio la base B_U di cui si è detto in precedenza. Quindi, in particolare, *la procedura qui indicata include anche quella già esposta per rispondere al punto (b), e quindi anche al punto (a).*

Per quanto riguarda il punto *(d)*, abbiamo che $v \in U := \mathit{Span}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ se e soltanto se la matrice M_U e la matrice $\left(M_U \,\middle|\, v \right)$ hanno lo stesso rango. Ora, per calcolare il rango della prima matrice si può procedere come già esposto per risolvere il punto *(b)*: analogamente si procede per il calcolo del rango della seconda. In particolare, la procedura di R.S. per il calcolo del rango della *prima* matrice può essere "inclusa" nell'analoga procedura per il calcolo del rango della *seconda*.

Veniamo ai calcoli. Dall'analisi fatta qui sopra, abbiamo che le procedure esposte per risolvere i punti *(a)*, *(b)*, *(c)* e *(d) possono essere tutte inglobate in una sola*, come segue.

Consideriamo la matrice

$$A := \left(u_1 \,\middle|\, u_2 \,\middle|\, u_3 \,\middle|\, u_4 \,\middle|\, u_5 \,\middle|\, \underline{e}_1 \,\middle|\, \underline{e}_2 \,\middle|\, \underline{e}_3 \,\middle|\, \underline{e}_4 \,\middle|\, v \right) = \left(M_U \,\middle|\, I_4 \,\middle|\, v \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

sulla quale, mediante un procedimento di eliminazione di Gauss, operiamo una R.S. Otteniamo

$$A := \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e III riga}}}$$

$$\xRightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e III riga}}} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 2\cdot \mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 1\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 3\cdot \mathrm{I}}}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 2\cdot \mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 1\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 3\cdot \mathrm{I}}} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 12 & -2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 2\cdot \mathrm{II}]{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 4\cdot \mathrm{II}}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 2\cdot \mathrm{II}]{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 4\cdot \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & -4 & -7 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & -2 & -4 & 1 & -10 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 1\cdot \mathrm{III}]{}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 1\cdot \mathrm{III}]{} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & -4 & -7 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) =: \Sigma$$

L'ultima matrice ottenuta, che indichiamo sinteticamente con Σ, è a scala (superiore); in particolare, *le sue prime cinque colonne formano la matrice a scala (superiore)*

$$S_U := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è R.S. della matrice M_U. Possiamo adesso trarre le nostre conclusioni.

Per (a): I pivot (:= primi elementi non nulli sulle varie righe) di S_U sono tre, precisamente $p_1 = 1$, $p_2 = -1$ e $p_3 = -10$: quindi il rango di S_U — pari al numero di pivot di S_U — è esattamente 3. Infine, per quanto detto in partenza la dimensione di U è pari al rango di M_U, che a sua volta è uguale al rango di S_A, dunque è uguale a 3: quindi si conclude che *la dimensione di U è 3*, il che risponde al quesito in *(a)*.

Per (b): I tre pivot $p_1 = 1$, $p_2 = -1$ e $p_3 = -10$ di S_U stanno rispettivamente nelle colonne 1, 2 e 5 di S_U. Pertanto, le corrispondenti colonne della matrice iniziale M_U ci danno i vettori della base B_U richiesta: dunque in definitiva come risposta a *(b)* abbiamo

$$B_U = \{ u_1 , u_2 , u_5 \} = \big\{ (3,-1,1,2) , (2,-3,2,2) , (7,-1,3,0) \big\}$$

<u>*Per (c)*</u>: I pivot di Σ sono quattro (come sapevamo sin dall'inizio che sarebbe dovuto essere...), e precisamente sono i pivot p_1, p_2 e p_3 della matrice S_U più il quarto pivot (sulla quarta riga) $p_4 = -1$. Tale pivot "aggiuntivo" sta sulla sesta colonna. Ora, nella matrice iniziale A la sesta colonna è occupata dal vettore $\underline{e}_1$, perciò possiamo concludere che quest'ultimo, insieme ai vettori della base B_U sopra descritta, costituisce una base di $V := \mathbb{R}^4$ del tipo richiesto. Dunque la nostra risposta al questo in *(c)* è

$$\begin{aligned} B \;=\; B_U \cup \big\{\underline{e}_1\big\} \;=\; \big\{u_1\,,\,u_2\,,\,u_5\,,\,\underline{e}_1\big\} \;&= \\ &= \;\big\{(3,-1,1,2)\,,\,(2,-3,2,2)\,,\,(7,-1,3,0)\,,\,(1,0,0,0)\big\} \end{aligned}$$

<u>*Per (d)*</u>: Nella matrice Σ la decima colonna — che nella matrice iniziale A è occupata dal vettore v — al di sotto della terza riga (dove sta il più "basso" dei tre pivot della matrice S_U) ha ancora elementi diversi da zero. Pertanto possiamo concludere che il vettore v è linearmente indipendente dai vettori u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, che generano U: quindi la risposta al questo in *(c)* è che *il vettore v non appartiene al sottospazio U*.

<u>*Osservazioni*</u>: *(a)* La base B considerata qui sopra in risposta al quesito in *(c)* non è l'unica possibile! Ad esempio, un'altra — ottenibile con meno calcoli — si trova così.

Effettuiamo i calcoli precedenti con una matrice A' di forma 4×6 ottenuta da A scartandone le colonne 6, 7, 8 e 9 (cioè quelle contenenti i vettori della base canonica): in tal caso i conti sono ovviamente un po' più semplici, ma ci permettono ancora di trovare la base B_U di U già ottenuta e di scoprire che il vettore v non appartiene al sottospazio U. Allora, dato che U ha dimensione 3, il sottospazio generato da U e da v, oppure semplicemente da una qualsiasi base B'_U di U e da v, ha dimensione 4; perciò, essendo sottospazio di $V := \mathbb{R}^4$ che pure ha dimensione 4, si conclude che tale sottospazio coincide con V. Ma allora possiamo concludere che $B'_U \cup \{v\}$ è base di V: e in particolare, *la base $B' := B_U \cup \{v\}$ è un'altra possibile base di V del tipo richiesto dal quesito in (c).*

(b) I calcoli fatti sulla matrice A nel procedimento di R.S. sono stati dettati da alcune scelte specifiche, precisamente quelle relative alla scelta di un pivot nella colonna considerata volta per volta. Ora, con altre scelte (ove possibile) i calcoli si svolgeranno in modo ovviamente diverso, ma i risultati saranno equivalenti (e le conclusioni uguali). In questo senso, uno sviluppo alternativo, ad esempio, potrebbe essere il seguente:

$$A \;:=\; \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e II riga}}}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{scambio I} \\ \text{e II riga}}} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}\,\mapsto\,\mathrm{IV}+2\cdot\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}+1\cdot\mathrm{I}}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}\mapsto\mathrm{IV}+2\cdot\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}\mapsto\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{I}\\ \mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}+1\cdot\mathrm{I}}} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & 21 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 12 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{scambio II}\\ \text{e III riga}}}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{scambio II}\\ \text{e III riga}}} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & 21 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & -4 & 4 & 12 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}\mapsto\mathrm{IV}-4\cdot\mathrm{II}]{\mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}-7\cdot\mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}\mapsto\mathrm{IV}-4\cdot\mathrm{II}]{\mathrm{III}\mapsto\mathrm{III}-7\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & -4 & -7 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & -2 & -4 & 1 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}\mapsto\mathrm{IV}-1\cdot\mathrm{III}]{}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}\mapsto\mathrm{IV}-1\cdot\mathrm{III}]{} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} -1 & -3 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & -4 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) =: \Sigma'$$

L'ultima matrice ottenuta, indicata con Σ', è a scala (superiore): si tratta di *un'altra* R.S. di A, diversa (leggermente) da quella ottenuta in precedenza! In particolare, *le sue prime cinque colonne formano la matrice a scala (superiore)*

$$S'_U := \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una divera R.S. della matrice M_U. Possiamo adesso trarre le nostre conclusioni come in precedenza, ottenendo esattamente gli stessi risultati. $\square$

$\cdots * \cdots$

[2] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R}) \quad .$$

Calcolare il rango della matrice A con almeno *due metodi* diversi.

<u>*Soluzione:*</u> Procediamo al calcolo del rango della matrice data con tre metodi diversi.

<u>*1º metodo*</u>*:* Dalla teoria generale, sappiamo che se riduciamo la matrice A a scala, ottenendo una matrice a scala S_A, allora $rg(A) = rg(S_A)$, cioè il rango della matrice di partenza è uguale al rango della matrice a scala ottenuta tramite il processo di riduzione a scala (=R.S.). Il vantaggio è che per la matrice a scala S_A il rango è pari al numero di pivot, che è anche il numero di righe non nulle in S_A, e dunque è di immediata lettura basta "guardare" S_A!

Procedendo ad operare una R.S. troviamo

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} + \mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 3 \cdot \mathrm{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 2 \cdot \mathrm{II}]{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{II}}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - 2 \cdot \mathrm{II}]{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_A$$

Pertanto, poiché S_A ha esattamente due righe non nulle (e due pivot), abbiamo

$$(A) = (S_A) = 2 \tag{1}$$

<u>*2º metodo*</u>*:* Per il *Teorema degli Orlati*, il rango della matrice A si può calcolare come segue. Cerchiamo dentro A una sottomatrice quadrata A', il cui ordine (=taglia, grandezza) indichiamo con r, che sia *non singolare*, cioè tale che $det\big(A'\big) \neq 0$, e tale che *ogni sottomatrice quadrata A'' di ordine $r+1$ ottenuta orlando A' — in altre parole, contenente A' come sua sottomatrice — sia invece singolare*, cioè tale che $det\big(A''\big) = 0$. Potremo allora concludere che $rg\,(A) = r$.

Ad esempio, la sottomatrice $A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formata dai coefficienti di A sulle prime due righe e le prime due colonne è non singolare, perché il suo determinante è

$$det\big(A'\big) := det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Le sottomatrici A'' di A ottenute *orlando* la sottomatrice A' sono quelle ottenute aggiungendo ad A' (nelle rispettive posizioni) i coefficienti di *un'altra riga* e *un'altra colonna* (di A). In questo caso, possiamo scegliere una tra le due righe non impegnate da A', cioè le righe 3, 4, e una tra le due colonne non impegnate da A', cioè le colonne 3, 4: in totale, avremo quindi quattro possibili scelte, che ci daranno quattro diverse sottomatrici A'' di A ottenute orlando A'. Siccome ciascuna di queste sottomatrici corrisponde alla scelta di una riga in più e una colonna in più, se tale riga è la riga i e tale colonna è la colonna j indicheremo la sottomatrice ottenuta con $A''_{(i,j)}$. In concreto le quattro sottomatrici in esame sono

$$A''_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad A''_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A''_{(4,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad A''_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Andiamo ora a calcolare i determinanti di queste quattro matrici: usando la regola di Sarrus, troviamo

$$\begin{aligned} det\big(A''_{(3,3)}\big) \;&=\; det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = \\ &= (-4) + (-6) + 0 - (-9) - 0 - (-1) = -4 - 6 + 9 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det\big(A''_{(3,4)}\big) \;&=\; det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = \\ &= 2 + (-6) + 0 - (-3) - 0 - (-1) = 2 - 6 + 3 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det\big(A''_{(4,3)}\big) \;&=\; det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \cdot 1 = \\ &= (-1) + (-2) + 0 - (-3) - 0 - 0 = -1 - 2 + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det\big(A''_{(4,4)}\big) \;&=\; det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 = \\ &= 1 + (-2) + 0 - (-1) - 0 - 0 = 1 - 2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Dunque tutte le sottomatrici ottenute orlando A' hanno determinante nullo (sono singolari), e quindi possiamo concludere che $rg(A) = 2$, in coerenza con la (1).

NOTA: Naturalmente si poteva applicare il Teorema degli Orlati in modo diverso, cioè scegliendo un'altra sottomatrice $\widehat{A}'$ di ordine due non singolare da cui partire: ad esempio, la sottomatrice $\widehat{A}' := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formata dai coefficienti di A sulle righe 1 e 2 e sulle colonne 2 e 3 è non singolare, perché il suo determinante è

$$det\big(\widehat{A}'\big) := det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

Le sottomatrici $\widehat{A}''$ di A ottenute *orlando* la sottomatrice $\widehat{A}'$ sono ancora quattro, perché sono quelle ottenute aggiungendo ad $\widehat{A}'$ (nelle rispettive posizioni) i coefficienti di un'altra riga, scelta adesso tra la terza e la quarta riga di A (che sono quelle non impegnate da $\widehat{A}'$) e un'altra colonna, scelta ora tra la prima e la quarta colonna di A (che sono quelle non impegnate da $\widehat{A}'$). Utilizzando la stessa notazione di prima, tali sottomatrici sono

$$\widehat{A}''_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \widehat{A}''_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{A}''_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \widehat{A}''_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che capitano alcune coincidenze, precisamente $\widehat{A}''_{(3,1)} = A''_{(3,3)}$ e $A''_{(4,3)} = \widehat{A}''_{(4,1)}$.

Calcolando poi i determinanti delle quattro sottomatrici $\widehat{A}''_{(i,j)}$ si trova che sono tutti uguali a zero, e si può concludere come prima.

Osservazione: Un altro risultato — soltanto parziale — che si può ottenere con la tecnica dei determinanti è il seguente. Dato che la matrice A è quadrata, possiamo calcolarne il determinante. Se questo fosse diverso da zero, potremmo concludere che il rango della matrice sia massimo, cioè pari al suo ordine, in questo caso quattro. Ma nel caso in esame il calcolo invece dà $det\big(A\big) = 0$, e da questo possiamo dedurre *soltanto* che il rango di A *non è massimo*, cioè $rg\big(A\big) < 4$. Quindi troviamo una *stima* di $rg\big(A\big)$, ma *non il suo valore preciso*. Per avere quest'ultimo dobbiamo calcolare i determinanti di varie sottomatrici quadrate di A, esattamente come prescritto dal Teorema degli Orlati.

3º metodo : Sempre dalla teoria generale, sappiamo che il rango della matrice A è uguale a quello della sua trasposta A^T, cioè $rg(A) = rg\big(A^T\big)$. Il rango di A^T poi possiamo calcolarlo passando per una R.S. di A^T stessa (come fatto in precedenza per A stessa).

Dunque, operando su A^T una R.S. otteniamo

$$A^T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - \mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 3\cdot\mathrm{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - \mathrm{II}]{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - \mathrm{II}]{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{A^T}$$

Perciò abbiamo $rg\big(A^T\big) = rg\big(S_{A^T}\big) = 2$, e quindi in definitiva

$$rg(A) = rg\big(A^T\big) = 2 \tag{2}$$

che di nuovo è coerente con la (1). $\square$

$\cdots * \cdots$

[3] Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Calcolare gli autovalori della matrice M .

(b) Calcolare gli autospazi della matrice M .

(c) Determinare, *giustificando la risposta*, se M sia diagonalizzabile oppure no. In caso negativo, giustificare la risposta. In caso affermativo, determinare una *base* diagonalizzante e una *matrice* diagonalizzante di M .

<u>Soluzione</u>: *(a)* Dalla teoria generale sappiamo che l'insieme $Spec(M)$ di tutti gli autovalori di M coincide con l'insieme delle radici del *polinomio caratteristico di* M : qeust'ultimo è il polinomio

$$p_M(x) := det\big(M - x\,I_3\big) := det\begin{pmatrix} 2-x & -1 & 3 \\ -4 & 2-x & -6 \\ 2 & 1 & 3-x \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante qui sopra mediante la regola di Sarrus, si ottiene

$$\begin{aligned} p_M(x) &:= det\big(M - x\,I_3\big) := det\begin{pmatrix} 2-x & -1 & 3 \\ -4 & 2-x & -6 \\ 2 & 1 & 3-x \end{pmatrix} = \\ &= (2-x)\cdot(2-x)\cdot(3-x) + (-1)\cdot(-6)\cdot 2 + (-4)\cdot 1\cdot 3 - \\ &\qquad - 3\cdot(2-x)\cdot 2 - (-1)\cdot(-4)\cdot(3-x) - (-6)\cdot 1\cdot(2-x) = \\ &= (2-x)(2-x)(3-x) + 12 + -12 - 6\,(2-x) - 4\,(3-x) + 6\,(2-x) = \\ &\qquad = -x^3 + 7\,x^2 - 12\,x = -x\,(x-3)\,(x-4) \end{aligned}$$

così che $p_A(x) = -x\cdot(x-3)\cdot(x-4)$. Le radici di tale polinomio, cioè — per quanto già osservato — gli *autovalori* di M, sono chiaramente 0 , 3 e 4 , cioè $Spec(M) = \{0\,,3\,,4\,\}$.

(b) Per ciascun autovalore $\lambda \in Spec(M) = \{0\,,3\,,4\,\}$ di M, il corrispondente *autospazio* — sottospazio vettoriale di $V := \mathbb{R}^3$ — è dato da

$$V_\lambda := \big\{\, v \in V \,\big|\, M\cdot v = \lambda\, v \,\big\} = Ker\big(M - \lambda\, I_3\big)$$

Perciò calcolare V_λ significa esattamente calcolare il nucleo $Ker\big(M - \lambda\, I_3\big)$ della matrice $M_\lambda := \big(M - \lambda\, I_3\big)$: quest'ultimo a sua volta è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\circledast_\lambda : M_\lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, in cui $\mathbf{x} := (x,y,z)^T$ mentre $\mathbf{0} := (0,0,0)^T$.

NOTA: il fatto che $\lambda \in \mathbb{R}$ sia un autovalore di M significa esattamente che

il sistema $\circledast_\lambda$ ha certamente soluzioni non banali,

o in altre parole che $dim\big(Ker(M_\lambda)\big) > 0$. Infatti, λ è autovalore di M se e soltanto se è radice del polinomio caratteristico di M, cioè se e soltanto se $det(M_\lambda) \neq 0$, e questo significa proprio che la matrice quadrata M_λ ha rango minore del suo ordine (che è 3), cioè $rg(M_\lambda) < 3$. Ma allora il *Teorema della Dimensione* (o *"del Rango"*) ci garantisce che

$$dim\big(Ker(M_\lambda)\big) \;=\; dim\big(\mathbb{R}^3\big) \;-\; rg(M_\lambda) \;=\; 3 \;-\; rg(M_\lambda) \;>\; 0$$

come appunto già affermato. Come conseguenza di tutto ciò, noi sappiamo *a priori* che dobbiamo trovare delle soluzioni non banali del sistema $\circledast_\lambda$! Perciò se per caso ci succederà che soluzioni del genere non le troviamo saremo sicuri di aver sbagliato qualcosa — o nel risolvere il sistema $\circledast_\lambda$, oppure in precedenza nel calcolare gli autovalori λ — e quindi faremo le verifiche e le controprove del caso per individuare e correggere l'errore, o *gli* errori, commesso/i...

Osserviamo anche che ciascun autospazio V_λ ha dimensione — che è la *molteplicità geometrica del corrispondente autovalore* λ — almeno uno, cioè $m_g(\lambda) := dim(V_\lambda) \geq 1$. D'altra parte, sappiamo anche che la somma di tutte le molteplicità è maggiorata dalla dimensione dello spazio su cui agisce la matrice, cioè l'ordine della matrice stessa, in questo caso 3: in formule, $m_g(0) + m_g(3) + m_g(4) \leq 3$. Insieme alle tre diseguaglianze $m_g(0) \geq 1$, $m_g(3) \geq 1$, $m_g(4) \geq 1$ questo ci dà

$$m_g(0) \;=\; 1\,, \qquad m_g(3) \;=\; 1\,, \qquad m_g(4) \;=\; 1 \tag{3}$$

Passiamo ora a risolvere i vari sistemi $\circledast_\lambda$, riducendo a scala la loro matrice dei coefficienti M_λ. Distinguendo i vari casi, otteniamo quanto segue:

$$\underline{\lambda = 0} \quad\Longrightarrow\quad M_\lambda = M_0 \;:=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow[\text{III}\mapsto\text{III}-1\cdot\text{I}]{\text{II}\mapsto\text{II}+2\cdot\text{I}}$$

$$\xRightarrow[\text{III}\mapsto\text{III}-1\cdot\text{I}]{\text{II}\mapsto\text{II}+2\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio II} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=:\; S_0$$

Ora, la matrice finale S_0 è a scala (superiore), e ci dice che l'autospazio V_0 è l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_0^S \,:\, S_0\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{0}$ (equivalente al sistema $\circledast_0$ iniziale), che risolviamo così:

$$\circledast_0^S \;:\; S_0\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad\mapsto\quad \begin{cases} 2\,x \,-\, y \,+\, 3\,z \;=\; 0 \\ 2\,y \;=\; 0 \\ 0 \;=\; 0 \end{cases} \qquad\mapsto\quad \begin{cases} x \;=\; -\frac{3}{2}\,\alpha \\ y \;=\; 0 \\ z \;=\; \alpha \end{cases} \qquad \big(\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\big)$$

Pertanto, *l'autospazio associato all'autovalore* $\lambda_1 = 0$ è $V_0 = \big\{ \big(\frac{-3}{2}\,\alpha\,,0\,,\alpha\big) \,\big|\, \alpha\in\mathbb{R} \big\}$, che per nostra comodità possiamo anche riscrivere come $V_0 = \big\{ \big(3\,\alpha'\,,0\,,-2\,\alpha'\big) \,\big|\, \alpha'\in\mathbb{R} \big\}$.

In particolare, da questo possiamo anche osservare che una base di V_0 è $\{\, v_0 := (3,0,-2) \,\}$ (ad esempio; poi ovviamente ce ne sono altre!...), e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_1 = 0$ è $m_g(0) := \mathit{dim}(V_0) = 1$, come già osservato in (2).

VERIFICA: prima di proseguire, la *verifica* che possiamo fare a questo punto è che i vettori che abbiamo trovato siano effettivamente autovettori di M associati all'autovalore $\lambda_1 = 0$: detto in altri termini, dobbiamo verificare che sia proprio

$$M\, v_{(\alpha')} \;=\; 0\, v_{(\alpha')} \qquad \text{per ogni vettore} \quad v_{(\alpha')} := \big(3\,\alpha'\,,\,0\,,\,-2\,\alpha'\big)\;, \qquad \text{con} \quad \alpha' \in \mathbb{R}\;. \quad (4)$$

Ora, il calcolo diretto ci dà

$$Mv_{(\alpha')} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\,\alpha' \\ 0 \\ 2\,\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3\,\alpha' + (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-2\,\alpha') \\ -4\cdot 3\,\alpha' + 2\cdot 0 + (-6)\cdot(-2\,\alpha') \\ 2\cdot 3\,\alpha' + 1\cdot 0 + 3\cdot(-2\,\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\, v_{(\alpha')}$$

per ogni $\alpha' \in \mathbb{R}$, e quindi la (4) è effettivamente verificata.

Si noti che questa è una verifica soltanto parziale! Infatti, quel che abbiamo fatto ci garantisce che effettivamente i vettori della forma $v_{(\alpha')} := \big(3\,\alpha'\,,\,0\,,\,-2\,\alpha'\big)$ sono appunto autovettori di autovalore 0 , e quindi l'autospazio V_0 effettivamente *contiene* il sottospazio $\big\{\big(3\,\alpha'\,,\,0\,,\,-2\,\alpha'\big) \,\big|\, \alpha' \in \mathbb{R}\big\}$, ma non ci assicura che *coincida* con tale sottospazio, come abbiamo trovato in precedenza. Ma siccome sappiamo già che $\mathit{dim}(V_0) = m_g(0) := 1$, per la (2), e ovviamente abbiamo anche $\mathit{dim}\big(\big\{\big(3\,\alpha'\,,\,0\,,\,-2\,\alpha'\big) \,\big|\, \alpha' \in \mathbb{R}\big\}\big) = 1$, possiamo concludere che l'autospazio V_0 necessariamente coincide (visto che ha la stessa dimensione...) con il suo sottospazio $\big\{\big(3\,\alpha'\,,\,0\,,\,-2\,\alpha'\big) \,\big|\, \alpha' \in \mathbb{R}\big\}$, e la nostra verifica è completa!

$$\underline{\lambda = 3} \quad \Longrightarrow \quad M_\lambda = M_3 := \begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 3 \\ -4 & 2-3 & -6 \\ 2 & 1 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 2\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 4\cdot\mathrm{I}}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 2\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 4\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -18 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{scambio II} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -18 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 3\cdot\mathrm{II}}$$

$$\xRightarrow{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 3\cdot\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_3$$

(N.B.: in questo caso — diversamente da prima! — lo scambio di righe che abbiamo effettuato non era strettamente necessario: lo abbiamo fatto soltanto per scegliere un pivot con il quale i calcoli venissero più semplici)

La matrice finale S_3 è a scala (superiore), e ci dice che l'autospazio V_3 è l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_3^S : S_3\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (equivalente al sistema $\circledast_3$ di partenza), che risolviamo così:

$$\circledast_3^S \,:\, S_3\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \mapsto \quad \begin{cases} -\,x \,-\, y \,+\, 3\,z \,=\, 0 \\ -\,y \,+\, 6\,z \,=\, 0 \\ 0 \,=\, 0 \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{cases} x \,=\, -3\,\beta \\ y \,=\, 6\,\beta \\ z \,=\, \beta \end{cases} \quad \big(\forall\, \beta \in \mathbb{R}\big)$$

Dunque *l'autospazio associato all'autovalore* $\lambda_2 = 3$ è $V_3 = \big\{ \big(-3\,\beta\,, 6\,\beta\,, \beta \big) \,\big|\, \beta \in \mathbb{R} \big\}$.

In particolare poi possiamo anche osservare che una base di V_3 è $\big\{ v_3 := (3, -6, -1) \big\}$ (ad esempio: qui abbiamo scelto $\beta = -1$): perciò la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_2 = 3$ è $m_g(3) := \mathit{dim}\,(V_3) = 1$, come abbiamo visto in (2).

VERIFICA: prima di andare oltre, possiamo ora *verificare* che i vettori che abbiamo trovato siano effettivamente autovettori di M associati all'autovalore $\lambda_2 = 3$: in altre parole, dobbiamo verificare che sia proprio

$$M\, v_{[\beta]} \;=\; 3\, v_{[\beta]} \qquad \text{per ogni vettore} \quad v_{[\beta]} := \big(-3\,\beta\,,\, 6\,\beta\,,\, \beta \big)\;, \qquad \text{con} \quad \beta \in \mathbb{R}\;. \tag{5}$$

Con il calcolo nudo e crudo otteniamo

$$M v_{[\beta]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3\,\beta \\ 6\,\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3\,\beta) + (-1) \cdot 6\,\beta + 3 \cdot \beta \\ -4 \cdot (-3\,\beta) + 2 \cdot 6\,\beta + (-6) \cdot \beta \\ 2 \cdot (-3\,\beta) + 1 \cdot 6\,\beta + 3 \cdot \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9\,\beta \\ 18\,\beta \\ 3\,\beta \end{pmatrix} = 3\, v_{[\beta]}$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, e così la (5) è effettivamente verificata.

Anche in questo caso valgono le osservazioni fatte per la verifica relativa all'autospazio V_0 , per cui anche questa è una verifica parziale ma — tenendo conto che sappiamo già che $\mathit{dim}\,(V_3) = m_g(3) := 1$ — in definitiva completa.

$\underline{\lambda = 4} \quad \Longrightarrow \quad M_\lambda = M_4 := \begin{pmatrix} 2-4 & -1 & 3 \\ -4 & 2-4 & -6 \\ 2 & 1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 1 \cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}}$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 1 \cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{scambio II} \\ \text{e III riga}}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 6 \cdot \mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 6 \cdot \mathrm{II}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \; S_4$$

(N.B.: anche stavolta lo scambio di righe che abbiamo effettuato non era strettamente necessario, e lo abbiamo fatto soltanto per semplificare i calcoli)

La matrice finale S_4 è a scala (superiore), e l'autospazio V_4 è l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_4^S : S_4\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (equivalente al sistema $\circledast_4$ iniziale), che risolviamo così:

$$\circledast_4^S \;:\; S_4\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \mapsto \quad \begin{cases} -2\,x \,-\, y \,+\, 3\,z \;=\; 0 \\ 2\,z \;=\; 0 \\ 0 \;=\; 0 \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{cases} x \;=\; -\gamma/2 \\ y \;=\; \gamma \\ z \;=\; 0 \end{cases} \qquad \big(\forall\, \gamma \in \mathbb{R} \big)$$

Perciò *l'autospazio associato all'autovalore* $\lambda_3 = 4$ è $V_4 = \big\{ \big(-\gamma/2\,, \gamma\,, 0 \big) \,\big|\, \gamma \in \mathbb{R} \big\}$, che poi per nostra comodità riscriviamo come $V_4 = \big\{ \big(\gamma', -2\,\gamma', 0 \big) \,\big|\, \gamma' \in \mathbb{R} \big\}$.

In particolare, osserviamo che una possibile base di V_4 è $\big\{\, v_4 := (1,-2,0) \,\big\}$ (ad esempio: viene per $\gamma' = 1$): quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_3 = 4$ è $m_g(4) := dim\,(V_4) = 1$, come già notato nella (2).

VERIFICA: prima di proseguire, procediamo a *verificare* che i vettori trovati siano davvero autovettori di M associati all'autovalore $\lambda_3 = 4$: in altre parole, vogliamo verificare che sia proprio

$$M\,v_{\langle\gamma'\rangle} \;=\; 4\,v_{\langle\gamma'\rangle} \qquad \text{per ogni vettore} \quad v_{\langle\gamma'\rangle} := \big(\gamma',\, -2\,\gamma',\, 0\big)\;, \qquad \text{con} \quad \gamma' \in \mathbb{R}\;. \tag{6}$$

Il calcolo puro e semplice ci dà

$$M v_{\langle\gamma'\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma' \\ -2\,\gamma' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\gamma' + (-1)\cdot(-2\,\gamma') + 3\cdot 0 \\ -4\cdot\gamma' + 2\cdot(-2\,\gamma') + (-6)\cdot 0 \\ 2\cdot\gamma' + 1\cdot(-2\,\gamma') + 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\gamma' \\ -8\,\gamma' \\ 0 \end{pmatrix} = 4\,v_{\langle\gamma'\rangle}$$

per ogni $\gamma' \in \mathbb{R}$, così che la (6) è effettivamente verificata.

Anche stavolta vanno fatte le osservazioni già considerate nel verificare l'autospazio V_0 .

(c) Dalla teoria generale, sappiamo che un criterio per la diagonalizzabilità di una matrice quadrata di ordine n è il seguente:

Se la matrice ha esattamente n autovalori (distinti), allora essa è diagonalizzabile.

(*N.B.:* il viceversa invece *non vale*, cioè *non è vero* in generale che se la matrice ha meno di n autovalori allora essa non è diagonalizzabile! In altre parole, esistono matrici di ordine n che hanno meno di n autovalori e tuttavia sono diagonalizzabili)

Ora, nel caso in esame la matrice M ha ordine tre, e abbiamo visto nel rispondere al quesito in *(a)* che essa ha esattamente tre autovalori distinti. Quindi si può applicare il criterio appena citato (con $n = 3$) e concludere quindi che *la matrice M è diagonalizzabile.*

In alternativa, possiamo far uso di quest'altro criterio:

Una matrice quadrata di ordine n è diagonalizzabile se e soltanto se
la somma delle molteplicità geometriche di tutti i suoi autovalori è pari a n .

(*N.B.:* in generale la suddetta somma di molteplicità geometriche è sempre *minore o uguale* all'ordine n della matrice)

Nel caso in esame abbiamo visto che gli autovalori della matrice M hanno tutti molteplicità geometrica pari a 1, e sono in tutto tre, quindi effettivamente la somma delle molteplicità di tutti gli autovalori di M è $m_g(0) + m_g(3) + m_g(4) = 1+1+1 = 3$, e quindi usando il criterio su esposto si conclude allora che *la matrice M è diagonalizzabile.*

Una *base diagonalizzante* di M è, per definizione, una base B_d di $V := \mathbb{R}^3$ rispetto alla quale l'endomorfismo $L_M : V \longrightarrow V \,\big(v \mapsto L_M(v) := M\cdot v\big)$ associato a M sia espresso da una matrice *diagonale*, diciamo D . Questo equivale a dire che la base B_d è formata da autovettori, e che la matrice diagonale D ha sulla diagonale i corrispondenti autovalori. Precisamente, se $B_d = \{b_1, b_2, b_3\}$ è la matrice diagonalizzante e $D = diag\big(\delta_1, \delta_2, \delta_3\big)$ è la matrice diagonale associata allora

$$\big(L_M(b_i) = \big)\; M\cdot b_i \;=\; \delta_i\, b_i \qquad \text{per ogni} \quad i \in \{1,2,3\}$$

cioè ogni b_i è autovettore di autovalore $\delta_i \, (i = 1, 2, 3)$.

Con questa osservazione in mente, possiamo subito rispondere alla penultima richiesta in *(c)*: una base diagonalizzante B_d di M è data dall'insieme degli autovettori v_0, v_3 e v_4 già trovati in precedenza, cioè

$$B_d \;=\; \big\{ v_0 := (3,0,-2) \, , \, v_3 := (3,-6,-1) \, , \, v_4 := (1,-2,0) \big\} \tag{7}$$

N.B.: ovviamente, se si scelgono autovettori b_1, b_2 e b_3 diversi o li si prende in ordine diverso, si otterrà una base diagonalizzante diversa, ma — se per il resto tutto è stato fatto correttamente — ugualmente valida! Infatti, esiste più di una soluzione possibile per questo problema.

Infine, una *matrice diagonalizzante* di M è, per definizione, una matrice Δ quadrata dello stesso ordine di M (dunque di ordine 3, nel nostro caso) che descriva il cambiamento di base dalla base canonica di $V := \mathbb{R}^3$, cioè

$$\underline{B}_3 \;:=\; \big\{ \underline{e}_1 := (1,0,0) \, , \, \underline{e}_2 := (0,1,0) \, , \, \underline{e}_3 := (0,0,1) \big\}$$

ad una base diagonalizzante di M, che indichiamo con $B_d = \{b_1, b_2, b_3\}$ come prima. Pertanto, dalla teoria generale sappiamo che la matrice Δ sarà l'unica matrice avente per colonne le stringhe dei coefficienti di tali vettori rispetto alla base canonica $\underline{B}_3$, cioè — grossa semplificazione!... — proprio i vettori della base B_d, dunque $\Delta = \big(b_1 \,\big|\, b_2 \,\big|\, b_3 \big)$. Inoltre, tale matrice dovrà essere invertibile e soddisfare la condizione

$$\Delta^{-1} \cdot M \cdot \Delta \;=\; D \tag{8}$$

o, equivalentemente, la condizione

$$M \cdot \Delta \;=\; \Delta \cdot D \tag{9}$$

dove D è la matrice diagonale $D := diag\big(\delta_1 \, , \, \delta_2 \, , \, \delta_3 \big) = diag\big(0 \, , \, 3 \, , \, 4 \big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Grazie alla prima osservazione, abbiamo che — relativamente alla nostra scelta di autovettori, e dell'ordine in cui li consideriamo — *la matrice diagonalizzante* Δ è

$$\Delta \;=\; \big(b_1 \,\big|\, b_2 \,\big|\, b_3 \big) \;=\; \big(v_0 \,\big|\, v_3 \,\big|\, v_4 \big) \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

N.B.: anche qui, scegliendo una base diagonalizzante (intesa come insieme ordinato) diversa si otterrà una matrice diagonalizzante diversa, ma — se per il resto tutto è stato fatto correttamente — ugualmente valida! Di nuovo, esiste più di una soluzione possibile anche per quest'ultimo problema.

Per concludere possiamo controllare la correttezza dei risultati ottenuti, verificando che sia effettivamente soddisfatta una delle due identità equivalenti (8) o (9). *Ovviamente* conviene verificare la (9), perché per la (8) invece è necessario prima calcolare la matrice inversa Δ^{-1} di Δ (un lavoro in più, suscettibile di introdurre errori...).

Ora, il calcolo diretto ci dà

$$M \cdot \Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-6) + 3\cdot(-1) & 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 3\cdot 0 \\ -4\cdot 3 + 2\cdot 0 + (-6)\cdot(-2) & -4\cdot 3 + 2\cdot(-6) + (-6)\cdot(-1) & -4\cdot 1 + 2\cdot(-2) + (-6)\cdot 0 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 2\cdot 3 + 1\cdot(-6) + 3\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+0-6 & 6+6-3 & 2+2+0 \\ -12+0+12 & -12-12+6 & -4-4+0 \\ 6+0-6 & 6-6-3 & 2-2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 \\ 0 & -18 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

da una parte, e dall'altra

$$\Delta \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 & 3\cdot 0 + 3\cdot 3 + 1\cdot 0 & 3\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 4 \\ 0\cdot 0 + (-6)\cdot 0 + (-2)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-6)\cdot 3 + (-2)\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-6)\cdot 0 + (-2)\cdot 4 \\ (-2)\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 & (-2)\cdot 0 + (-1)\cdot 3 + 0\cdot 0 & (-2)\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+9+0 & 0+0+4 \\ 0+0+0 & 0-18+0 & 0+0-8 \\ 0+0+0 & 0-3+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 \\ 0 & -18 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque in definitiva abbiamo

$$M \cdot \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 \\ 0 & -18 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \Delta \cdot D$$

per cui la (9) è effettivamente soddisfatta.

Se invece, per caso, uno volesse verificare che sia soddisfatta la (8), allora sarebbe necessario calcolare preventivamente la matrice Δ^{-1} inversa di Δ. Dalla forma esplicita (10) di Δ possiamo calcolare — con vari metodi — l'inversa Δ^{-1}, trovando

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & -1 \\ 2 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

A questo punto con un calcolo diretto si verifica che la (8) è effettivamente soddisfatta. $\square$

$\cdots * \cdots$

[4] Si consideri lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$, la matrice

$$S := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

e la funzione $g_S : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) \mapsto g_S\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) := \underline{x}^T \cdot S \cdot \underline{y}$.

(a) Dimostrare che la funzione g_S è bilineare, simmetrica e definita positiva (così che g_S è un prodotto scalare su V, per il quale quest'ultimo è uno spazio vettoriale metrico).

(b) Detto $W := Span\big((-1,5,1)\big)$ il sottospazio vettoriale di V generato dal vettore $w := (-1,5,1)$, calcolare il sottospazio $W^\perp$ ortogonale a W.

(c) Determinare una base ortogonale del sottospazio $W^\perp$.

<u>Soluzione:</u> *(a)* Dalla teoria generale, sappiamo che *tutte le funzioni della forma*

$$g_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad \big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) \mapsto g_A\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) := \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y}$$

sono bilineari — dove A è una matrice $n \times n$ e " $\cdot$ " indica il prodotto righe per colonne. Infatti, il prodotto righe per colonne è (bilineare, cioè) lineare a sinistra e a destra: quindi la funzione $\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) \mapsto \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y} = \underline{x}^T \cdot \big(A \cdot \underline{y}\big) = \big(\underline{x}^T \cdot A\big) \cdot \underline{y}$ è lineare nella variabile $\underline{x}^T$ — perché è il fattore di sinistra del prodotto $\underline{x}^T \cdot \big(A \cdot \underline{y}\big)$ — ed è lineare nella variabile $\underline{y}$ — perché è il fattore di destra del prodotto $\big(\underline{x}^T \cdot A\big) \cdot \underline{y}$. In particolare, per $n := 3$ e $A := S$ troviamo che la funzione g_S di nostro interesse è appunto bilineare.

Inoltre, sempre dalla teoria generale ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (qualsiasi) si dice *simmetrica* se $f\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) = f\big(\underline{y}\,,\underline{x}\big)$ per ogni $\underline{x}\,,\underline{y} \in \mathbb{R}^n$. In particolare, sappiamo anche che una funzione (bilineare) $\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) \mapsto g_A\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) := \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{y}$ del tipo su indicato è simmetrica se e soltanto se la matrice A è simmetrica, cioè $A = A^T$ (in parole, A è uguale alla sua trasposta). Di nuovo, per $n := 3$ e $A := S$ troviamo che la funzione g_S che ci interessa è proprio simmetrica, perché la matrice S, essendo diagonale, è ovviamente simmetrica!

Volendo dimostrare le stesse cose con una verifica diretta, possiamo esplicitare la forma di g_S : troviamo allora che $g_S\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) := \underline{x}^T \cdot S \cdot \underline{y} = 3\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3$. Allora

$$\begin{aligned}
g_S\big(\underline{x}' + \underline{x}''\,,\,\underline{y}\big) &= 3\,\big(x_1' + x_1''\big)\,y_1 + \big(x_2' + x_2''\big)\,y_2 + 2\,\big(x_3' + x_3''\big)\,y_3 = \\
&= \big(3\,x_1'\,y_1 + x_2'\,y_2 + 2\,x_3'\,y_3\big) + \big(3\,x_1''\,y_1 + x_2''\,y_2 + 2\,x_3''\,y_3\big) = g_S\big(\underline{x}'\,,\,\underline{y}\big) + g_S\big(\underline{x}''\,,\,\underline{y}\big) \\
g_S\big(\alpha\,\underline{x}\,,\,\underline{y}\big) &= 3\,\alpha\,x_1\,y_1 + \alpha\,x_2\,y_2 + 2\,\alpha\,x_3\,y_3 = \alpha\,\big(3\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3\big) = \alpha\,g_S\big(\underline{x}\,,\,\underline{y}\big) \\
g_S\big(\underline{x}\,,\,\underline{y}' + \underline{y}''\big) &= 3\,x_1\,\big(y_1' + y_1''\big) + x_2\,\big(y_2' + y_2''\big) + 2\,x_3\,\big(y_3' + y_3''\big) = \\
&= \big(3\,x_1\,y_1' + x_2\,y_2' + 2\,x_3\,y_3'\big) + \big(3\,x_1\,y_1'' + x_2\,y_2'' + 2\,x_3\,y_3''\big) = g_S\big(\underline{x}\,,\,\underline{y}'\big) + g_S\big(\underline{x}\,,\,\underline{y}''\big) \\
g_S\big(\underline{x}\,,\,\alpha\,\underline{y}\big) &= 3\,x_1\,\alpha\,y_1 + x_2\,\alpha\,y_2 + 2\,x_3\,\alpha\,y_3 = \alpha\,\big(3\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3\big) = \alpha\,g_S\big(\underline{x}\,,\,\underline{y}\big)
\end{aligned}$$

per ogni $\underline{x}\,,\ \underline{x}'\,,\ \underline{x}''\,,\ \underline{y}\,,\ \underline{y}'\,,\ \underline{y}'' \in V := \mathbb{R}^3$ e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il che dimostra che la funzione g_S è effettivamente bilineare. Quanto al fatto che essa sia anche simmetrica, ciò segue subito dall'osservare che

$$g_S\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) \;=\; 3\,x_1\,y_1 \,+\, x_2\,y_2 \,+\, 2\,x_3\,y_3 \;=\; 3\,y_1\,x_1 \,+\, y_2\,x_2 \,+\, 2\,y_3\,x_3 \;=\; g_S\big(\underline{y}\,,\underline{x}\big)$$

dove la seconda identità è dovuta semplicemente al fatto che il prodotto tra numeri reali è commutativo, così che $x_i y_i \,=\, y_i\,x_i$ $(\,i=1,2,3\,)$.

Infine, ricordiamo che una funzione $f \,:\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineare si dice *definita positiva* se $f\big(\underline{x}\,,\underline{x}\big) \,>\, 0$ per ogni $\underline{x} \,\in\, \mathbb{R}^n \setminus \underline{0}$, dove $\underline{0} \,:=\, (0,0,\dots,0) \,\in\, \mathbb{R}^n$ è la n–pla di tutti zeri. Ora, per ogni $\underline{x} \,=\, (x_1,x_2,x_3) \,\in\, \mathbb{R}^3 \setminus \underline{0}$ si ha sempre $x_1^2 \,\geq\, 0$, $x_2^2 \,\geq\, 0$, $x_3^2 \,\geq\, 0$, e inoltre — poiché $\underline{x} \,\neq\, \underline{0} \,=\, (0,0,0)$ — anche $x_i \,\neq\, 0$ per almeno un indice $i \in \{1,2,3\}$: quindi $x_i^2 \neq 0$, dunque $x_i^2 > 0$, e in conclusione otteniamo che $g_S\big(\underline{x}\,,\underline{x}\big) \,:=\, 3\,x_1^2 \,+\, x_2^2 \,+\, 2\,x_3^2 > 0$, per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \underline{0}$. Dunque g_S è effettivamente definita positiva.

(b) Per definizione, il sottospazio vettoriale $W := \mathit{Span}\big((-1,5,1)\big)$ di V generato dal vettore $w := (-1,5,1)$ è semplicemente l'insieme

$$W \;=\; \mathbb{R}.w \;=\; \big\{\,\alpha\,w \,\big|\, \alpha \in \mathbb{R}\,\big\} \;=\; \big\{\big(-\alpha\,,\,5\,\alpha\,,\,\alpha\big)\,\big|\,\alpha \in \mathbb{R}\,\big\}$$

di tutti i multipli del vettore w. Inoltre, il sottospazio $W^\perp$ ortogonale a W è semplicemente l'insieme di tutti i vettori v in V che siano ortogonali a W, cioè *a tutti* i vettori di W: in formule,

$$W^\perp := \big\{v \in V \,\big|\, v \perp W\big\} \;=\; \big\{v \in V \,\big|\, v \perp \dot{w} \;\;\forall\, \dot{w} {\in} W\big\} \;=\; \big\{v \in V \,\big|\, g_S(v,\dot{w}) = 0 \;\;\forall\, \dot{w} {\in} W\big\}$$

tenendo conto del fatto che $v \perp \dot{w}$ (in parole, "v è ortogonale a $\dot{w}$") significa esattamente — proprio per definizione! — che $g_S\big(v,\dot{w}\big) \,=\, 0$. Allora, leggendo ciascuna identità $g_S\big(v,\dot{w}\big) = 0$ come una *equazione* — lineare! — nella incognita vettoriale $v \in V$, possiamo concludere che $W^\perp$ non è altro che l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni

$$\circledast : \begin{cases} g_S\big(v,\dot{w}\big) \;=\; 0 \\ \;\;\forall\;\, \dot{w} \in W \end{cases} \tag{11}$$

inoltre, osserviamo anche che in effetti questo è *un sistema di equazioni lineari omogeneo*.

Poiché la funzione g_S è bilineare, essa è lineare anche rispetto alla variabile di destra — il vettore $\dot{w} \in W$ nel sistema $\circledast$. Da questo discende che presi $\dot{w}_1,\dots,\dot{w}_d \in W$ si ha

$$g_S\big(v,\dot{w}_1\big) \;=\; 0 \;\;,\;\; \dots\dots \;\;,\;\; g_S\big(v,\dot{w}_d\big) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g_S\big(v\,,\,\textstyle\sum_{i=1}^d \alpha_i\,\dot{w}_i\big) \;=\; 0$$

per ogni $\alpha_1,\dots,\alpha_d \in \mathbb{R}$. Perciò, se $B := \big\{\dot{w}_1\,,\,\dots\,,\,\dot{w}_d\big\}$ è una *base* del sottospazio W, il sistema $\circledast$ in (11) risulta essere *equivalente* al sistema

$$\circledast_B : \begin{cases} g_S\big(v,\dot{w}\big) \;=\; 0 \\ \;\;\forall\;\, \dot{w} \in B \end{cases} \qquad , \qquad \text{cioè} \qquad \circledast_B : \begin{cases} g_S\big(v,\dot{w}_1\big) \;=\; 0 \\ g_S\big(v,\dot{w}_2\big) \;=\; 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ g_S\big(v,\dot{w}_d\big) \;=\; 0 \end{cases} \tag{12}$$

che ha il vantaggio di essere un sistema di un numero *finito* di equazioni.

Ora, nel caso in esame il sottospazio W ha dimensione 1, e come base possiamo prendere proprio $\big\{\dot{w}_1 := w = (-1,5,1)\big\}$: perciò in definitiva il sistema che ci interessa si riduce a

$$g_S\big(v,w\big) \;=\; 0 \tag{13}$$

cioè ad *una sola equazione*, in cui l'incognita è il vettore $v \in V$. Così lo spazio $W^\perp$ che andiamo cercando è semplicemente l'insieme delle soluzioni (vettoriali) della (13) qui sopra!

Scrivendo esplicitamente il membro di sinistra, in cui poniamo $v = (x_1,x_2,x_3) \in V := \mathbb{R}^3$ e "sviluppiamo" w come $w = (-1,5,1)$, la (13) diventa

$$3\,x_1\,(-1) \,+\, x_2\,5 \,+\, 2\,x_3\,1 \;=\; 0$$

cioè

$$-3\,x_1 \,+\, 5\,x_2 + \,2\,x_3 \;=\; 0 \tag{14}$$

L'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (14) — che poi è $W^\perp$, per costruzione — è dato (qualunque sia il metodo con cui lo calcoliamo) da

$$\mathcal{S} \;=\; \big\{ (\,5\,\alpha + 2\,\beta\,,\,3\,\alpha\,,\,3\,\beta\,) \,\big|\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \,\big\}$$

Un metodo semplice per *verificarlo*, può essere questo:

–1) verificare che l'insieme $\mathcal{S}' := \big\{ (\,5\,\alpha + 2\,\beta\,,\,3\,\alpha\,,\,3\,\beta\,) \,\big|\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \,\big\}$ è effettivamente contenuto in $\mathcal{S}$, cioè è costituito di soluzioni della (14) — basta fare il calcolo diretto!

–2) verificare (di nuovo mediante calcolo diretto) che $\mathcal{S}'$ è un sottospazio vettoriale di $V := \mathbb{R}^3$ — cioè è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per gli scalari (*N.B.:* questo in effetti *lo sapevamo già*, dato che $\mathcal{S} = W^\perp$, per costruzione, e l'ortogonale di un qualsiasi sottoinsieme è <u>sempre</u> un sottospazio vettoriale!);

–3) verificare che il sottospazio $\mathcal{S}'$ ha dimensione 2: una possibile base, ad esempio, è $B_{W^\perp} := \big\{(5,3,0),(2,0,3)\big\}$, che si ottiene scegliendo $(\alpha,\beta) = (1,0)$ per il primo vettore e $(\alpha,\beta) = (0,1)$ per il secondo;

–4) osservare che 2 è proprio la dimensione che deve avere lo spazio $\mathcal{S}$ delle soluzioni della (14), in quanto tale dimensione deve essere

$$dim\,(V) - rk\big(\circledast_B\big) \;=\; 3-1 \;=\; 2$$

in virtù del "Teorema della Dimensione" (o "del Rango");

–5) concludere osservando che, siccome $\mathcal{S}'$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{S}$ ed *entrambi hanno dimensione 2* — in particolare, hanno dimensione finita uguale — deve necessariamente aversi l'uguaglianza $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

In ogni caso, la conclusione — che risponde al quesito in *(b)* — è che

$$W^\perp = \mathcal{S} \;=\; \big\{ (\,5\,\alpha + 2\,\beta\,,\,3\,\alpha\,,\,3\,\beta\,) \,\big|\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \,\big\}$$

(c) Per ottenere una base ortogonale del sottospazio $W^{\perp}$, possiamo procedere secondo due diversi metodi, come segue:

Primo metodo: Fissiamo una qualunque base di $W^{\perp}$ e applichiamo ad essa il metodo di ortogonalizzazione di Grahm-Schmidt, che ci darà una base ortogonale. Ad esempio, possiamo considerare la base $B_{W^{\perp}} := \big\{(5,3,0),(2,0,3)\big\}$ considerata in precedenza; allora il metodo di ortogonalizzazione di Grahm-Schmidt ci prescrive di calcolare l'insieme $B^{ort}_{W^{\perp}} := \{u_1,u_2\}$ — che sarà appunto una base ortogonale di $W^{\perp}$, come richiesto — in questo modo: ponendo $v_1 := (5,3,0)$ e $v_2 := (2,0,3)$, deve essere

$$u_1 := v_1 \quad , \qquad u_2 := v_2 - \frac{\big\langle v_2,u_1\big\rangle}{\big\|u_1\big\|^2} \cdot u_1 \tag{15}$$

dove $\big\langle v_2,u_1\big\rangle := g_S\big(v_2,u_1\big)$, $\big\|u_1\big\|^2 := \big\langle u_1,u_1\big\rangle = g_S\big(w_1,w_1\big)$. Sostituendo le formule esplicite per g_S , v_1 e v_2 si ottiene

$$\begin{aligned}\big\langle v_2,u_1\big\rangle &:= g_S\big(v_2,u_1\big) = 2\cdot 3\cdot 5 + 0\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 0 = 30+0+0 = 30 \\ \big\|u_1\big\|^2 &:= \big\langle u_1,u_1\big\rangle = g_S\big(u_1,u_1\big) = 5\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot 2\cdot 0 = 75+9+0 = 84\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} u_1 &:= v_1 = (5,3,0) \\ u_2 &:= v_2 - \big\langle v_2,u_1\big\rangle \cdot u_1 = (2,0,3) - \frac{30}{84}(5,3,0) = \big(3/14,-15/14,3\big)\end{aligned} \tag{16}$$

per cui $B^{ort}_{W^{\perp}} := \{u_1,u_2\} = \big\{(5,3,0)\,,\,\big(3/14,-15/14,3\big)\big\}$ è una base ortogonale del tipo richiesto.

In alternativa, lo stesso metodo porta a risultati diversi — ma ugualmente validi! — se si parte da una diversa base (orientata) di $W^{\perp}$. Ad esempio, se considero la stessa base di prima ma ordino i suoi elementi in un altro modo, diciamo ponendo $v'_1 := (2,0,3)$ e $v'_2 := (5,3,0)$, allora le formule in (15) con v'_1 al posto di v_1 e v'_2 al posto di v_2 mi daranno due nuovi vettori

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &:= v'_1 = (2,0,3) \\ \dot{u}_2 &:= v'_2 - \big\langle v'_2,\dot{u}_1\big\rangle \cdot \dot{u}_1 = (5,3,0) - \frac{30}{30}(2,0,3) = (3,3,3)\end{aligned} \tag{17}$$

per cui $\dot{B}^{ort}_{W^{\perp}} := \{\dot{u}_1,\dot{u}_2\} = \big\{(2,0,3)\,,\,(3,3,3)\big\}$ è anch'essa una base ortogonale del tipo richiesto, diversa — e per certi versi "più bella"! — da quella ottenuta in precedenza.

VERIFICA: come sempre si può/deve effettuare una *verifica* dei risultati... In questo caso, basta verificare che i vettori trovati — di $B^{ort}_{W^{\perp}}$ in un caso e di $\dot{B}^{ort}_{W^{\perp}}$ nell'altro — siano effettivamente ortogonali tra di loro, cioè abbiano prodotto scalare — che in questo caso è g_S — nullo gli uni con gli altri. A quel punto, sia $B^{ort}_{W^{\perp}}$ che $\dot{B}^{ort}_{W^{\perp}}$ saranno insiemi di vettori linearmente indipendenti (perché non nulli e a due a due ortogonali) e quindi, siccome hanno ciascuno *due* elementi, e la dimensione di $W^\perp$ è proprio *due*, possiamo anche concludere che entrambi gli insiemi sono *basi* (ortogonali) di $W^\perp$.

<u>Secondo metodo</u>*:* Costruiamo una base ortogonale di $W^\perp$ in questo modo. Come primo vettore, scegliamo un qualsiasi vettore u_1 che sia appartenente a $W^\perp$ e diverso dal vettore nullo. Poi il secondo vettore dovrà essere un vettore u_2 diverso da $\underline{0}$ e tale che

$$\textit{(I)} \quad u_2 \in W^\perp \quad , \qquad\qquad \textit{(II)} \quad u_2 \perp u_1 \tag{18}$$

A questo punto ricordiamo che abbiamo equivalenze di condizioni

$$u_2 \in W^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad u_2 \perp W := \mathit{Span}\big(w\big) \quad \Longleftrightarrow \quad u_2 \perp w := (-1,5,1)$$

così che la (18) diventa

$$\textit{(I)} \quad u_2 \perp w \quad , \qquad\qquad \textit{(II)} \quad u_2 \perp u_1 \tag{19}$$

Infine, dato che $u_2 \perp w \iff g_S\big(u_2,w\big) = 0$ e $u_2 \perp u_1 \iff g_S\big(u_2,u_1\big) = 0$, la (19) a sua volta equivale a risolvere il sistema di equazioni lineari (omogeneo)

$$\circledast' : \begin{cases} g_S\big(u_2,w\big) \, = \, 0 \\ g_S\big(u_2,u_1\big) \, = \, 0 \end{cases} \tag{20}$$

nell'incognita vettoriale $u_2 \in V := \mathbb{R}^3$, cioè — in altre parole — nelle tre incognite numeriche $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che $u_2 = (x_1,x_2,x_3)$. Ogni soluzione *non banale* (cioè diversa dal vettore nullo) mi darà un vettore u_2 che insieme al vettore u_1 già fissato formerà una base ortogonale di $W^\perp$ come richiesto.

Ad esempio, scegliendo $u_1 := (5,3,0)$, ricordando che $w := (-1,5,1)$ e sviluppando esplicitamente il prodotto scalare g_S troviamo che la (20) diventa

$$\circledast' : \begin{cases} -3\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 \, = \, 0 \\ 15\,x_1 + 3\,x_2 \, = \, 0 \end{cases} \tag{21}$$

Risolvendo tale sistema, troviamo che l'insieme delle sue soluzioni è

$$\big\{(\gamma\,,-5\,\gamma\,,14\,\gamma)\,\big|\,\gamma \in \mathbb{R}\big\}$$

(come si può facilmente verificare...). Ora un qualunque valore non nullo di γ mi darà una soluzione u_2 non banale del sistema $\circledast'$: ad esempio, per $\gamma = 1$ otteniamo $u_2 := (1,-5,14)$. La base cercata allora sarà $\big\{\,u_1 := (5,3,0)\,,\,u_2 := (1,-5,14)\big\}$. Si noti che è diversa da entrambe le basi calcolate con il primo metodo!

Come secondo esempio, scegliamo $u_1 := (2,0,3)$. Questa volta allora la (20) diventa

$$\circledast'' : \begin{cases} -3\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 \, = \, 0 \\ 6\,x_1 + 6\,x_3 \, = \, 0 \end{cases} \tag{22}$$

Si noti che la prima equazione *non* cambia, perché dipende soltanto da w , e *non* dalla scelta del vettore u_1 ! L'insieme delle sue soluzioni è

$$\left\{ (\delta\,,\,\delta\,,-\delta\,) \,\middle|\, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

(come si può facilmente verificare!), e un qualsiasi valore non nullo di δ ci darà una soluzione u_2 non banale del sistema $\circledast''$: ad esempio con $\delta = 1$ si ha $u_2 := (1, 1, -1)$. La base cercata dunque sarà $\left\{ u_1 := (2, 0, 3)\,,\, u_2 := (1, 1, -1) \right\}$. Si noti ancora che tale base è diversa da tutte le altre (tre!) calcolate fino ad ora. $\square$