GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2010/2011

prof. Fabio GAVARINI

Esame scritto del 23 Febbraio 2011

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si considerino i cinque vettori

$$u_1 := \big(3\,,\,-1\,,\,1\,,\,2\big)\ ,\quad u_2 := \big(2\,,-3\,,\,2\,,\,2\big)\ ,\quad u_3 := \big(1\,,\,2\,,\,-1\,,\,0\big)$$
$$u_4 := \big(0\,,7\,,\,-4\,,\,-2\big)\ ,\qquad u_5 := \big(7\,,-1\,,\,3\,,\,0\big)$$

il sottospazio vettoriale $U := \mathit{Span}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ generato da tali vettori, e il vettore $v := \big(7\,,\,4\,,\,0\,,\,-2\big)$.

(a) Determinare la dimensione del sottospazio U .

(b) Estrarre dall'insieme $\big\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\big\}$ un suo sottoinsieme B_U che sia una base del sottospazio U .

(c) Estendere la base B_U di U trovata al punto *(b)* ad una base B di $V := \mathbb{R}^4$.

(d) Determinare se il vettore v sia contenuto, oppure no, nel sottospazio U .

[2] Si consideri la matrice

$$A \ := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathit{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \quad .$$

Calcolare il rango della matrice A con almeno *due metodi* diversi.

(continua...)

[3] Si consideri la matrice

$$M \;:=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \;\in\; Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Calcolare gli autovalori della matrice M .

(b) Calcolare gli autospazi della matrice M .

(c) Determinare, *giustificando la risposta*, se M sia diagonalizzabile oppure no. In caso negativo, giustificare la risposta. In caso affermativo, determinare una *base* diagonalizzante e una *matrice* diagonalizzante di M .

[4] Si consideri lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$, la matrice

$$S \;:=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;\in\; Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

e la funzione $g_S : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) \mapsto g_S\big(\underline{x}\,,\underline{y}\big) := \underline{x}^T \cdot S \cdot \underline{y}$.

(a) Dimostrare che la funzione g_S è bilineare, simmetrica e definita positiva (così che g_S è un prodotto scalare su V, per il quale quest'ultimo è uno spazio vettoriale metrico).

(b) Detto $W := Span\big((-1,5,1)\big)$ il sottospazio vettoriale di V generato dal vettore $w := (-1,5,1)$, calcolare il sottospazio $W^\perp$ ortogonale a W .

(c) Determinare una base ortogonale del sottospazio $W^\perp$.