GEOMETRIA I modulo
CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2009/2010

prof. Fabio GAVARINI

Esame scritto del 16 Febbraio 2010

Svolgimento completo

.... $*$ ....

N.B.: lo svolgimento qui presentato è molto lungo... Questo non significa *che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si approfitta per spiegare — anche in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con dovizia di particolari tutti gli aspetti della teoria toccati in misura maggiore o minore dal testo in questione.*

... $*$ ...

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico, si consideri il sottospazio $W := \mathit{Span}(w_1, w_2, w_3)$ generato dai tre vettori

$$w_1 := (1,1,0,0)\,,\ \ w_2 := (1,0,0,-1)\,,\ \ w_3 := (0,1,0,3)\ \in\ \mathbb{R}^4 \quad .$$

(a) Determinare una base ortonormale B_W di W.

(b) Completare la base B_W del sottospazio W determinata al punto *(a)* ad una base ortonormale B_V dell'intero spazio $V := \mathbb{R}^4$.

Soluzione : *(a)* Dalla teoria generale, sappiamo che si può ottenere una base ortonormale di W con un procedimento in due passi, come segue:

— *(1)* a partire da una base qualsiasi B di W, costruiamo una base ortogonale B' (di W) tramite il procedimento di *ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*;

— *(2)* a partire dalla base ortogonale B', ne otteniamo una ortonormale B'' tramite il procedimento di *ortonormalizzazione*, cioè moltiplicando ogni vettore di B' per l'inverso della sua norma.

Cominciamo allora col fissare una base B di W. *Per far ciò, basta osservare che l'insieme* $B := \{w_1, w_2\,, w_3\}$ *dei generatori di W è una base*, perché tali vettori sono tra loro linearmente indipendenti. Per verificarlo, possiamo procedere così: formiamo la matrice

$$A := \begin{pmatrix} w_1 \\ — \\ w_2 \\ — \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha per righe i vettori w_1, w_2 e w_3 (nell'ordine); ci interessa allora calcolare il rango di A in due modi, e possiamo farlo in due modi.

Nel primo modo, riduciamo A in forma a scala (superiore) così:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + (-1) \cdot \mathrm{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 1 \cdot \mathrm{II}]{}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 1 \cdot \mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: S_A$$

dove S_A è appunto una matrice a scala (superiore) con esattamente tre pivot: 1, -1 e 2, rispettivamente nelle colonne 1, 2 e 4. Pertanto si ha $rg(A) = rg(S_A) = 3$.

Nel secondo modo, osserviamo che nella matrice iniziale A la sottomatrice $A_{1,2,3}^{1,2,4}$, di forma quadrata 3×3, formata dai coefficienti nelle righe 1, 2, 3 e dalle colonne 1, 2, 4, ha determinante

$$det\left(A_{1,2,3}^{1,2,4}\right) := det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - (-1) - 3 = -2 \neq 0$$

(calcolato usando la regola di Sarrus): in particolare esso è diverso da zero. Pertanto A ha un minore di ordine 3 (cioè appunto il determinante di una sottomatrice quadrata di ordine 3 in A) diverso da zero: quindi — per il *Teorema degli Orlati* — possiamo dedurne che $rg(A) = 3$.

In ogni caso abbiamo trovato che $rg(A) = 3$, e questo significa appunto che i tre vettori w_1, w_2 e w_3 — che costituiscono le righe di A — sono tra loro linearmente indipendenti, e dunque — come già affermato — l'insieme $B := \{w_1, w_2, w_3\}$ è effettivamente una base di W.

Attenzione, l'osservazione precedente è cruciale! Infatti, il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale di un certo (sotto)spazio W deve essere applicato ad un insieme di vettori in W *che sia una base di* W, non ad un insieme di vettori qualsiasi.
Più avanti vedremo un esempio di come l'inosservanza di questa condizione porti ad errori.

Possiamo dunque procedere con il passo *(1)*. Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt consiste in questo: a partire dalla base $B := \{w_1, w_2, w_3\}$ di W, si ottiene una base $B' := \{u_1, u_2, u_3\}$ di W che è *ortogonale*, definita per mezzo delle seguenti formule (ricorsive):

$$u_1 := w_1 \quad , \qquad u_2 := w_2 - \frac{\langle w_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \quad , \qquad u_3 := w_3 - \frac{\langle w_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle w_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

Procedendo a calcolare, si ottiene

$$u_1 = (1,1,0,0) \quad , \quad \langle u_1, u_1 \rangle = \big\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0) \big\rangle = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 2$$

$$\langle w_2, u_1 \rangle = \big\langle (1,0,0,-1), (1,1,0,0) \big\rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = 1$$

$$u_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (1,0,0,-1) - 1/2\,(1,1,0,0) = \big(1/2\,, -1/2\,, 0\,, -1\big)$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle = \Big\langle \big(1/2\,, -1/2\,, 0\,, -1\big), \big(1/2\,, -1/2\,, 0\,, -1\big) \Big\rangle = \big(1/2\big)^2 + \big(-1/2\big)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 3/2$$

$$\langle w_3, u_2 \rangle = \Big\langle (0,1,0,3)\,, \big(1/2\,, -1/2\,, 0\,, -1\big) \Big\rangle = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot \big(-1/2\big) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = -7/2$$

$$\langle w_3, u_1 \rangle = \big\langle (0,2,3,4), (1,1,0,0) \big\rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 2$$

$$u_3 := w_3 - \frac{\langle w_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle w_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 =$$

$$= (0,1,0,3) - 1/2\,(1,1,0,0) - \big(-7/2\big)\Big/\big(3/2\big)\,\big(1/2\,, -1/2\,, 0\,, -1\big) = \big(2/3\,, -2/3\,, 0\,, 2/3\big)$$

dunque la base ortogonale che otteniamo con il passo *(1)* è

$$B' := \{u_1, u_2, u_3\} = \big\{(1,1,0,0), \big(1/2, -1/2, 0, -1\big), \big(2/3, -2/3, 0, 2/3\big)\big\}$$

VERIFICA: Arrivati a questo punto, prima di proseguire è sempre bene fare una *verifica*: precisamente, verificare che i vettori u_1, u_2, u_3 che abbiamo calcolato siano effettivamente a due a due ortogonali, cioè i loro prodotti scalari (a due a due) siano tutti nulli. Se per caso ciò non fosse, vorrebbe dire — visto che il procedimento seguito era corretto — che nei calcoli precedenti è stato commesso qualche errore (rischio sempre presente!). Ora, calcolando otteniamo

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_2\rangle &= \big\langle (1,1,0,0), \big(1/2, -1/2, 0, -1\big)\big\rangle = 1\cdot 1/2 + 1\cdot\big(-1/2\big) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0 \\
\langle u_1, u_3\rangle &= \big\langle (1,1,0,0), \big(2/3, -2/3, 0, 2/3\big)\big\rangle = 1\cdot 2/3 + 1\cdot\big(-2/3\big) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0 \\
\langle u_2, u_3\rangle &= \big\langle \big(1/2, -1/2, 0, -1\big), \big(2/3, -2/3, 0, 2/3\big)\big\rangle = \\
&= 1/2\cdot 2/3 + \big(-1/2\big)\cdot\big(-2/3\big) + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2/3 = 1/3 + 1/3 - 2/3 = 0
\end{aligned}$$

e quindi i vettori che abbiamo trovato sono effettivamente a due a due ortogonali, come richiesto.

Adesso proseguiamo con il passo *(2)*, cioè sostituiamo alla base ortogonale $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ l'insieme $B'' = \{v_1, v_2, v_3\}$ definito da $v_i := \|u_i\|^{-1} u_i$ per ogni $i = 1,2,3$. Siccome B' è una base di W, ne seguirà automaticamente che anche B'' sarà una base di W; in più, dato che B' è ortogonale, sarà ortogonale anche B''. Infine, i vettori di B'' hanno norma 1, perché le definizioni e le proprietà della norma danno $\|v_i\| = \big\|\|u_i\|^{-1} u_i\big\| = \|u_i\|^{-1}\|u_i\| = 1$ per ogni $i = 1,2,3$. Concludendo — in una parola — $B_W := B''$ sarà una base *ortonormale* di W, come richiesto.

Passando ora ai calcoli (e sfruttando quelli già fatti in precedenza...), troviamo

$$\|u_1\| := \big\langle u_1, u_1\big\rangle^{1/2} = \sqrt{2}\,, \qquad \|u_2\| := \big\langle u_2, u_2\big\rangle^{1/2} = \sqrt{3/2}$$

$$\begin{aligned}
\|u_3\| := \big\langle u_3, u_3\big\rangle^{1/2} &= \big\langle \big(2/3, -2/3, 0, 2/3\big), \big(2/3, -2/3, 0, 2/3\big)\big\rangle = \\
&= \sqrt{\big(2/3\big)^2 + \big(-2/3\big)^2 + 0^2 + \big(2/3\big)^2} = \sqrt{4/3} = 2\big/\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Perciò la base ortonormale $B_W := B'' = \{v_1, v_2, v_3\}$ è data da

$$\begin{aligned}
v_1 &:= \|u_1\|^{-1} u_1 = 1\big/\sqrt{2}\,(1,1,0,0) = \Big(1\big/\sqrt{2}\,,\, 1\big/\sqrt{2}\,,\, 0\,,\, 0\Big) \\
v_2 &:= \|u_2\|^{-1} u_2 = \sqrt{2/3}\,\big(1/2, -1/2, 0, -1\big) = \Big(1\big/\sqrt{6}\,,\, -1\big/\sqrt{6}\,,\, 0\,,\, -\sqrt{2}\big/\sqrt{3}\Big) \\
v_3 &:= \|u_3\|^{-1} u_3 = \sqrt{3}\big/2\,\big(2/3, -2/3, 0, 2/3\big) = \Big(1\big/\sqrt{3}\,,\, -1\big/\sqrt{3}\,,\, 0\,,\, 1\big/\sqrt{3}\Big)
\end{aligned}$$

(b) Per completare la base B_W (ortonormale) di W ad una base ortonormale B_V di $V := \mathbb{R}^4$ occorre (ed è sufficiente) trovare un vettore $v_4 \in V$ che sia ortogonale ai vettori in B_W — il che equivale a dire che sia ortogonale a tutto il sottospazio W — e che abbia norma 1. A tal fine, possiamo seguire due metodi diversi, ma ovviamente equivalenti.

1^o^ metodo : Applichiamo il metodo standard per costruire una base ortonormale di $V := \mathbb{R}^4$, partendo però da una base B^V — non necessariamente ortonormale — che comunque estenda la base $B := \{w_1, w_2, w_3\}$ di W, dunque della forma $B^V = B \cup \{w_4\}$ dove il vettore w_4 dev'essere scelto in modo che l'insieme $B \cup \{w_4\}$ sia appunto una base di V.

Come prima scelta, possiamo considerare il vettore $w_4 := \underline{e}_3 = (0,0,1,0)$. In altre parole, consideriamo l'insieme $B^V := \{w_1, w_2, w_3, w_4 := \underline{e}_3\}$.

Andiamo allora a verificare che B^V *è una base di* $V := \mathbb{R}^4$. Questo è immediato, in quanto i suoi vettori sono tra loro linearmente indipendenti: infatti, procedendo come in *(a)* possiamo, ad esempio, considerare la matrice

$$A_V := \begin{pmatrix} A \\ \text{—} \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \text{—} \\ w_2 \\ \text{—} \\ w_3 \\ \text{—} \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha per righe i vettori w_1, w_2, w_3 e w_4 (in quest'ordine). Tali vettori sono linearmente indipendenti se e soltanto se la matrice A_V ha rango 4, e quindi (essendo una matrice *quadrata*, di ordine 4) se e soltanto se tale matrice ha determinante diverso da zero. Il calcolo diretto ci dà

$$\begin{aligned} det\big(A_V\big) &= det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= (-1) \cdot det\Big(A^{1,2,4}_{1,2,3}\Big) = (-1) \cdot (-2) = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo effettuato lo *sviluppo di Laplace lungo la quarta riga* e abbiamo sfruttato il calcolo già effettuato in precedenza del determinante della sottomatrice $A^{1,2,4}_{1,2,3}$.

In conclusione troviamo $det\big(A_V\big) \neq 0$, e quindi $rg\big(A_V\big) = 4$, così che w_1, w_2, w_3 e w_4 sono linearmente indipendenti, q.e.d.

Adesso, sapendo che $B^V := \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è una base di $V := \mathbb{R}^4$, possiamo applicare ad essa il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale. Osserviamo subito che tale base sarà del tipo $B'_V = B' \cup \{u_4\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, dove $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ è la base ortogonale di W calcolata in precedenza nel trattare il punto *(a)*. Inoltre, per costruzione — cioè essenzialmente per il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt — il vettore u_4 sarà ortogonale ai tre vettori u_1, u_2 e u_3: siccome questi ultimi formano una base di W (sempre per costruzione!), ne segue che u_4 *è ortogonale a tutto il sottospazio* W; infine, essendo elemento di una base il vettore u_4 sarà certamente *non nullo*. Quindi, in conclusione, il vettore $v := u_4$ sarà un vettore del tipo richiesto.

Volendo calcolare il vettore u_4, la formula generale del procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ci dà

$$u_4 := w_4 - \frac{\langle w_4, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 - \frac{\langle w_4, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\, u_2 - \frac{\langle w_4, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle}\, u_3$$

Dato che

$$\begin{aligned} \langle w_4, u_1\rangle &= \big\langle (0,0,1,0)\,, (1,1,0,0)\big\rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \\ \langle w_4, u_2\rangle &= \big\langle (0,0,1,0)\,, \big(1/2, -1/2, 0, -1\big)\big\rangle = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot \big(-1/2\big) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0 \\ \langle w_4, u_3\rangle &= \big\langle (0,0,1,0)\,, \big(2/3, -2/3, 0, 2/3\big)\big\rangle = 0 \cdot 2/3 + 1 \cdot \big(-2/3\big) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2/3 = 0 \end{aligned}$$

abbiamo allora semplicemente

$$u_4 \;:=\; w_4 - \frac{\langle w_4, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 - \frac{\langle w_4, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\, u_2 - \frac{\langle w_4, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle}\, u_3 \;=\; w_4$$

In effetti, ciò accade proprio perché, come mostrano i calcoli qui sopra, si ha $\langle w_4, u_i\rangle = 0$ per $i = 1,2,3$, cioè il vettore w_4 è *già* ortogonale ai vettori u_1, u_2, u_3.

Infine, il vettore v_4 cercato lo otteniamo moltiplicando u_4 per l'inverso della sua norma, cioè $v_4 := \|u_4\|^{-1}\, u_4$. Osserviamo tra l'altro che questo ha certamente senso, perché $u_4 \neq 0_V$ per costruzione, e quindi anche $\|u_4\| \neq 0$, per cui effettivamente $v_4 := \|u_4\|^{-1}\, u_4$ è ben definito! All'atto pratico poi abbiamo

$$\|u_4\| \;=\; \|w_4\| \;=\; \|\underline{e}_3\| \;:=\; \sqrt{\langle \underline{e}_3\,,\,\underline{e}_3\rangle} \;=\; \sqrt{0^2+0^2+1^2+0^2} \;=\; 1$$

e quindi $v_4 := \|u_4\|^{-1}\, u_4 = u_4 = w_4 := \underline{e}_3$.

Pertanto, in conclusione, la base ortonormale B_V di V che estende la base (ortonormale) B_W di W ottenuta in questo modo è

$$B_V \;=\; \{\, v_1\,, v_2\,, v_3\,, v_4 := (0,0,1,0)\,\}$$

<u>*Controesempio*</u>*:* Se il vettore w_4 da aggiungere a $B := \{w_1, w_2\,, w_3\}$ è scelto male — cioè è scelto appartenente a W — l'insieme $B' := B \cup \{w_4\}$ non sarà una base di V, e allora anche il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a sua volta non darà una base di V! Ad esempio, se si sceglie di prendere $w_4 := \underline{e}_4 = (0,0,0,1)$ e si considera l'insieme $B_V := \{w_1\,, w_2\,, w_3\,, w_4 := \underline{e}_3\}$, allora proviamo ad applicare ad esso il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Con i primi tre passi si ottengono gli stessi vettori u_1, u_2 e u_3 ottenuti in precedenza; ma quando si calcola il vettore u_4, la formula ci dà

$$\begin{aligned} u_4 \;&:=\; w_4 - \frac{\langle w_4, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 - \frac{\langle w_4, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\, u_2 - \frac{\langle w_4, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle}\, u_3 \;= \\ &=\; (0\,,0\,,0\,,1) \;-\; \frac{0}{2}\,(1\,,1\,,0\,,0) \;-\; \frac{-1}{3/2}\,\big(1/2\,,-1/2\,,0\,,-1\big) \;-\; \frac{2/3}{4/3}\,\big(2/3\,,-2/3\,,0\,,2/3\big) \;= \\ &=\; (0\,,0\,,0\,,1) \;-\; (0\,,0\,,0\,,0) \;+\; \big(1/3\,,-1/3\,,0\,,-2/3\big) \;-\; \big(1/3\,,-1/3\,,0\,,1/3\big) \;=\; (0\,,0\,,0\,,0) \end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned} \langle w_4, u_1\rangle \;&=\; \big\langle (0,0,0,1)\,,(1,1,0,0)\big\rangle \;=\; 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 \;=\; 0 \\ \langle w_4, u_2\rangle \;&=\; \big\langle (0,0,0,1)\,,\big(1/2,-1/2,0,-1\big)\big\rangle \;=\; 0\cdot 1/2 + 1\cdot\big(-1/2\big) + 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) \;=\; -1 \\ \langle w_4, u_3\rangle \;&=\; \big\langle (0,0,0,1)\,,\big(2/3,-2/3,0,2/3\big)\big\rangle \;=\; 0\cdot 2/3 + 1\cdot\big(-2/3\big) + 0\cdot 0 + 1\cdot 2/3 \;=\; 2/3 \end{aligned}$$

cioè $u_4 = (0\,,0\,,0\,,0)$, che non è certo un vettore che possa far parte di una base!!! In effetti, ogni volta che si parta da un vettore w_4 appartenente a W questo stesso calcolo ci darà sempre il risultato banale (e inutile, ai nostri fini) già visto, cioè $u_4 = (0\,,0\,,0\,,0)$. $\diamondsuit$

Il controesempio ora esposto ci mostra come un'errata scelta del vettore w_4 da cui partire porti ad errore. Ora, in precedenza abbiamo visto che una volta scelto un "candidato" w_4 bisogna verificare che esso sia linearmente indipendente dagli altri vettori già fissati w_1, w_2, w_3. Adesso, invece di "andare per tentativi e verifiche", possiamo procedere metodicamente, come segue.

Quel che ci occorre è una base di $V := \mathbb{R}^4$ che contenga $B := \{w_1, w_2, w_3\}$, e per trovarla c'è un metodo standard. Precisamente, consideriamo la matrice

$$M_V := \left(w_1^T \,\middle|\, w_2^T \,\middle|\, w_3^T \,\middle|\, \underline{e}_1^T \,\middle|\, \underline{e}_2^T \,\middle|\, \underline{e}_3^T \,\middle|\, \underline{e}_4^T \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha per colonne (in quest'ordine) i vettori w_1, w_2, w_3 e poi i vettori $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$ della base canonica di $V := \mathbb{R}^4$. Operiamo su tale matrice un procedimento di eliminazione di Gauss all'ingiù, che ci dà

$$M_V := \left(w_1^T \,\middle|\, w_2^T \,\middle|\, w_3^T \,\middle|\, \underline{e}_1^T \,\middle|\, \underline{e}_2^T \,\middle|\, \underline{e}_3^T \,\middle|\, \underline{e}_4^T \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \mapsto \text{II} + (-1)\cdot\text{I}}$$

$$\xrightarrow{\text{II} \mapsto \text{II} + (-1)\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} \mapsto \text{IV} + (-1)\cdot\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{IV} \mapsto \text{IV} + (-1)\cdot\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio III e IV riga}}$$

$$\xrightarrow{\text{scambio III e IV riga}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: S_M$$

Ora, la matrice finale S_M è in forma a scala (superiore), e i suoi pivot stanno nelle colonne 1, 2, 3 e 6. Siccome le colonne della matrice di partenza M formano un insieme $\{w_1, w_2, w_3, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ di generatori di V, adesso possiamo concludere che le colonne di M nelle posizioni corrispondenti ai pivot di S_M — dunque la prima, seconda, terza e sesta colonna — formano una base di V: in altre parole, $B^V := \{w_1, w_2, w_3, w_4 := \underline{e}_3\}$ è una base di $V := \mathbb{R}^4$.

N.B. : Si noti che la base B^V ottenuta contiene i vettori w_1, w_2 e w_3 non per caso, ma per costruzione, perché essi sono linearmente indipendenti, e la costruzione "se ne accorge"; anzi, il procedimento seguito *dimostra* appunto — tra l'altro — che questi vettori sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base di W. In tal senso, quest'ultimo approccio risulta certamente il più completo e "omogeneo", perché permette di affrontare, gestire e risolvere con un unico procedimento diversi aspetti del problema in esame. Infine, la base trovata è la stessa di prima, ma stavolta ottenuta con un procedimento metodico, non a tentativi.

2^o metodo : Poiché $B := \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di W, un vettore qualsiasi $v \in V$ sarà ortogonale a W se e soltanto se sarà ortogonale ai vettori in B. In formule, ciò si esprime con

$$v \perp W \iff v \perp w_i \quad (i = 1, 2, 3) \iff \circledast \begin{cases} \langle w_i, v \rangle = 0 \\ \forall\ i = 1, 2, 3; \end{cases}$$

Ora, il sistema $\circledast$ qui sopra è un sistema di tre equazioni lineari omogenee nelle quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4 che costituiscono le quattro componenti del vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Visto che il prodotto scalare canonico è dato da $\langle w_i\,, v\rangle := w_i \cdot v^T$ (prodotto righe per colonne tra una matrice riga e una matrice colonna!), il sistema $\circledast$ in forma compatta si scrive $\circledast\,:\; A\,v^T = \underline{0}^T$ con

$$\underline{0} := (0,0,0,0) = 0_V \in V \quad , \qquad A := \begin{pmatrix} w_1 \\ \text{—} \\ w_2 \\ \text{—} \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha per righe i vettori w_1, w_2 e w_3 (in quest'ordine).

Passando a risolvere il sistema lineare omogeneo $\circledast$, sappiamo già che la sua matrice dei coefficienti A ha rango 3: perciò il sottospazio di $V := \mathbb{R}^4$ di tutte le soluzioni di $\circledast$ — in altre parole, il nucleo della matrice A — ha dimensione $\mathit{dim}(V) - \mathit{rg}(A) = 4-3 = 1$, per il *Teorema del Rango* (o *"della Dimensione"*). Quindi gli elementi di tale nucleo formano una famiglia $\big\{v(t)\big\}_{t\in\mathbb{R}}$ di vettori dipendenti (linearmente) da uno e un solo parametro $t \in \mathbb{R}$, che ci dà *tutti* i vettori in V che siano ortogonali a W. Infine, se imponiamo a uno di tali vettori $v(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big)$ di avere norma 1 otteniamo le condizioni equivalenti

$$\big\|v(t)\big\| = 1 \iff \sqrt{\big\langle v(t), v(t)\big\rangle} = 1 \iff \big\langle v(t), v(t)\big\rangle = 1$$

l'ultima delle quali esplicitamente è

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2 + x_4(t)^2 \;=\; 1$$

che è un'equazione di secondo grado in t (perché le $x_i(t)$ sono polinomi di primo grado — omogenei — in t). Tale equazione avrà due soluzioni (distinte) $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, che corrisponderanno a due possibili scelte — precisamente, $v(t_1)$ e $v(t_2)$ — del vettore v_4 che andiamo cercando.

Detto questo, nel caso in esame *non serve fare molti calcoli!...* Infatti, osservando che i tre vettori w_1, w_2 e w_3 hanno tutti la terza componente uguale a zero, riconosciamo subito che tutti e tre sono ortogonali al vettore $u_4 := \underline{e}_3 = (0,0,1,0)$. Quindi, una possibile base B'_V del tipo che stiamo cercando è data da $B'_V = \{u_1\,, u_2\,, u_3\,, u_4 := \underline{e}_3\}$. Inoltre, il vettore $u_4 := \underline{e}_3$ ha norma $\|u_4\| = \big\|(0,0,1,0)\big\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2+0^2} = 1$, come già osservato, e quindi possiamo anche concludere che con $v_4 := u_4 = \underline{e}_3$ otteniamo la base ortonormale $B_V := \{v_1\,, v_2\,, v_3\,, v_4 := \underline{e}_3\}$ di V che estende la base B_W già considerata, come richiesto.

Se invece procediamo ordinatamente a svolgere i calcoli, l'eliminazione di Gauss all'ingiù ci dà

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\;\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + (-1)\cdot \mathrm{I}\;} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\;\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 1\cdot \mathrm{II}\;]{}$$

$$\xrightarrow[\;\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 1\cdot \mathrm{II}\;]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: S_A$$

Ora, la matrice finale S_A è a scala (superiore), e il sistema originale $\circledast\,:\; A\,v^T = \underline{0}^T$ è equivalente a $\circledast_S\,:\; S_A\,v^T = \underline{0}^T$. Per risolvere quest'ultimo, effettuiamo ancora un'eliminazione di Gauss, ma stavolta all'insù

$$S_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\;\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 1/2\cdot \mathrm{III}\;} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\;\mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} + 1\cdot \mathrm{II}\;} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Adesso la matrice finale è a scala superiore e "quasi diagonale", nel senso che gli unici suoi coefficienti non nulli sono i pivot: 1 sulla prima riga, -1 sulla seconda, e 2 sulla terza. Dividendo infine ciascuna riga per il suo pivot si ottiene la matrice

$$\widetilde{D}_A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ci dà il sistema lineare omogeneo (ancora equivalente al sistema originale $\circledast$)

$$\circledast_{\widetilde{D}} \; : \; \widetilde{D}_A \, v^T = \underline{0}^T \quad , \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 \; = \; 0 \\ x_2 \; = \; 0 \\ x_4 \; = \; 0 \end{cases} \quad ,$$

il cui insieme di soluzioni è $Ker(A) = Ker\big(\widetilde{D}_A\big) = \big\{ (0,0,t,0) \,\big|\, t \in \mathbb{R} \big\}$.

Naturalmente, lo stesso risultato si poteva ottenere risolvendo all'indietro il sistema

$$\circledast_S \; : \; S_A \, v^T = \underline{0}^T \quad , \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 \, + \, x_2 \; = \; 0 \\ -x_2 \, - \, x_4 \; = \; 0 \\ 2 \, x_4 \; = \; 0 \end{cases}$$

In ogni caso, abbiamo trovato che il sottospazio $W^\perp$ di tutti i vettori di $V := \mathbb{R}^4$ ortogonali a W è appunto $\big\{ (0,0,t,0) \,\big|\, t \in \mathbb{R} \big\}$. Imponendo ad uno di questi vettori $v(t) = (0,0,t,0) \in W^\perp$ di avere norma 1, si ottiene

$$\big\| v(t) \big\| = 1 \iff \big\| v(t) \big\| = \big\| (0,0,t,0) \big\| = 0^2 + 0^2 + t^2 + 0^2 = t^2 = 1 \iff t = \pm 1$$

quindi per la scelta del quarto vettore v_4 in una base ortonormale B_V che estenda B_W si hanno due possibilità:

$$v_4 := v(t_1) = v(1) = (0,0,1,0) = \underline{e}_3 \quad , \qquad v_4 := v(t_2) = v(-1) = (0,0,-1,0) = -\underline{e}_3$$

di cui la prima è quella che avevamo già considerato. $\square$

(continua...)

[2] Si consideri la matrice

$$M \;:=\; \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & 9 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \;\in\; Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Calcolare gli autovalori della matrice M .

(b) Calcolare gli autospazi della matrice M .

(c) Determinare, *giustificando la risposta*, se M sia diagonalizzabile oppure no.

Soluzione : *(a)* Dalla teoria generale sappiamo che l'insieme $Spec(M)$ di tutti gli autovalori di M coincide con l'insieme delle radici del *polinomio caratteristico di* M , che è il polinomio

$$p_M(x) \;:=\; det\big(\,M - x\,I_3\,\big) \;:=\; det\begin{pmatrix} 8-x & 0 & 9 \\ 9 & -1-x & 9 \\ -4 & 0 & -4-x \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante qui sopra mediante la regola di Sarrus, si ottiene

$$p_M(x) \;:=\; det\big(\,M - x\,I_3\,\big) \;:=\; det\begin{pmatrix} 8-x & 0 & 9 \\ 9 & -1-x & 9 \\ -4 & 0 & -4-x \end{pmatrix} \;=$$

$$= (8-x)\cdot(-1-x)\cdot(-4-x) + 0\cdot 9\cdot(-4) + 9\cdot 0\cdot 9 - 9\cdot(-1-x)\cdot(-4) - 0\cdot 9\cdot(-4-x) - 0\cdot 9\cdot(8-x) =$$

$$= \;(1+x)\cdot\big((8-x)\cdot(4+x) - 9\cdot 4\big) \;=\; -(1+x)\cdot\big(x^2 - 4\,x + 4\big) \;=\; -(1+x)\cdot(x-2)^2$$

così che $p_A(x) \;=\; -(1+x)\cdot(x-2)^2$. Le radici di tale polinomio, cioè — per quanto già osservato — gli *autovalori* di M, sono chiaramente -1 e 2 , cioè $Spec(M) = \{-1\,,2\,\}$.

(b) Per ogni autovalore $\lambda \in Spec(M) = \{-1\,,2\,\}$ di M, il corrispondente *autospazio* — sottospazio vettoriale di $V := \mathbb{R}^3$ — è dato da

$$V_\lambda \;:=\; \big\{\, v \in V \,\big|\, M\cdot v = \lambda\, v \,\big\} \;=\; Ker\big(\,M - \lambda\, I_3\,\big)$$

Pertanto calcolare V_λ significa esattamente calcolare il nucleo $Ker\big(M - \lambda\, I_3\big)$ della matrice $M_\lambda := \big(M - \lambda\, I_3\big)$, che è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\circledast_\lambda \,:\, M_\lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, in cui $\mathbf{x} := (x,y,z)^T$ mentre $\mathbf{0} := (0,0,0)^T$.

NOTA: il fatto che $\lambda \in \mathbb{R}$ sia un autovalore di M significa esattamente che

il sistema $\circledast_\lambda$ *ha certamente soluzioni non banali,*

o in altre parole che $dim\big(Ker(M_\lambda)\big) > 0$. Infatti, λ è autovalore di M se e soltanto se è radice del polinomio caratteristico di M , cioè se e soltanto se $det(M_\lambda) \neq 0$, e questo significa esattamente che la matrice quadrata M_λ ha rango minore del suo ordine (che è 3), cioè $rg(M_\lambda) < 3$. Ma allora il *Teorema della Dimensione* (o *"del Rango"*) ci assicura che

$$dim\big(Ker(M_\lambda)\big) \;=\; dim\big(\mathbb{R}^3\big) \;-\; rg(M_\lambda) \;=\; 3 \;-\; rg(M_\lambda) \;>\; 0$$

come appunto già affermato. La conseguenza di tutto ciò è che noi sappiamo *a priori* che dobbiamo trovare delle soluzioni non banali del sistema $\circledast_\lambda$! Perciò se per caso non le troveremo saremo sicuri di aver sbagliato qualcosa — o nel risolvere il sistema $\circledast_\lambda$, oppure in precedenza nel calcolare gli autovalori λ — e quindi faremo le verifiche e le controprove del caso per scoprire e correggere l'errore, o *gli* errori, commesso/i...

Ora, per risolvere il sistema $\circledast_\lambda$ riduciamo a scala la sua matrice dei coefficienti M_λ, distinguendo i vari casi come segue:

$$\underline{\lambda=-1} \quad \Longrightarrow \quad M_\lambda = M_{-1} := \begin{pmatrix} 8+1 & 0 & 9 \\ 9 & -1+1 & 9 \\ -4 & 0 & -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 9 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} =: M'$$

Senza fare molte altre manipolazioni, possiamo ora dedurre che l'autospazio V_{-1} non è altro che l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast'_{-1} : M'\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (equivalente al sistema iniziale $\circledast_{-1}$), che si risolve così:

$$\circledast'_{-1} \,:\, M'\,\mathbf{x}=\mathbf{0} \;\mapsto\; \begin{cases} 9x + 9z = 0 \\ 9x + 9z = 0 \\ -4x - 3z = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} z = -x \\ y = \alpha \\ -4x + 3x = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \quad \big(\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\big)$$

In conclusione, *l'autospazio associato all'autovalore* $\lambda_1 = -1$ è $V_{-1} = \big\{\, (0\,,\alpha\,,0) \,\big|\, \alpha \in \mathbb{R} \,\big\}$.

In particolare, da questo possiamo anche osservare che V_{-1} ha base $\big\{(0,1,0)\big\}$, e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_1=-1$ è $m_g(-1) := \mathit{dim}\,(V_{-1}) = 1$.

VERIFICA: prima di proseguire, la *verifica* che possiamo fare a questo punto è che i vettori che abbiamo trovato siano effettivamente autovalori di M associati all'autovalore $\lambda_1=-1$: in altre parole, dobbiamo verificare che sia davvero

$$M\,v_\alpha \;=\; (-1)\,v_\alpha \qquad \text{per ogni vettore} \quad v_\alpha := (0\,,\alpha\,,0)\;, \quad \text{con} \quad \alpha\in\mathbb{R}\;. \tag{1}$$

Ora, il calcolo diretto ci dà

$$M\,v_\alpha = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & 9 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cdot 0 + 0\cdot\alpha + 9\cdot 0 \\ 9\cdot 0 + (-1)\cdot\alpha + 9\cdot 0 \\ -4\cdot 0 + 0\cdot\alpha + (-4)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\,v_\alpha$$

per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, e quindi la (1) è effettivamente verificata.

Si noti che questa è una verifica soltanto parziale! Infatti, quanto appena visto ci garantisce che effettivamente i vettori della forma $v_\alpha := (0,\alpha,0)$ sono appunto autovettori di autovalore -1, e quindi l'autospazio V_{-1} effettivamente *contiene* il sottospazio $\big\{(0\,,\alpha\,,0)\,\big|\,\alpha\in\mathbb{R}\big\}$, ma non ci assicura che *coincida* con tale sottospazio, come abbiamo trovato in precedenza.

$$\underline{\lambda=2} \quad \Longrightarrow \quad M_\lambda = M_2 := \begin{pmatrix} 8-2 & 0 & 9 \\ 9 & -1-2 & 9 \\ -4 & 0 & -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 9 & -3 & 9 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xRightarrow[\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}+3/2\cdot\mathrm{III}]{\mathrm{I}\,\mapsto\,\mathrm{I}+3/2\cdot\mathrm{III}}$$

$$\xRightarrow[\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}+3/2\cdot\mathrm{III}]{\mathrm{I}\,\mapsto\,\mathrm{I}+3/2\cdot\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} =: S_2$$

Ora, la matrice finale S_2 è a scala (inferiore), e ci dice che l'autospazio V_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_2^S : S_2\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (equivalente al sistema $\circledast_2$ iniziale), che risolviamo così:

$$\circledast_2^S \,:\, S_2\,\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -4x - 6z = 0 \end{cases} \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta \\ z = -2\,\beta/3 \end{cases} \quad \big(\forall\,\beta\in\mathbb{R}\big)$$

Pertanto, *l'autospazio associato all'autovalore* $\lambda_2 = 2$ *è* $V_2 = \big\{ \big(\beta\,,\beta\,,-2\,\beta/3\big) \,\big|\, \beta \in \mathbb{R} \big\}$, che per nostra comodità possiamo anche riscrivere come $V_2 = \big\{ \big(3\,\gamma\,,3\,\gamma\,,-2\,\gamma\big) \,\big|\, \gamma \in \mathbb{R} \big\}$ oppure come $V_2 = \big\{ \big(-3\,\delta\,,-3\,\delta\,,2\,\delta\big) \,\big|\, \delta \in \mathbb{R} \big\}$.

In particolare, da questo possiamo anche osservare che V_2 ha base $\big\{(3,3,-2)\big\}$, e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_2 = 2$ è $m_g(2) := dim(V_2) = 1$.

VERIFICA: di nuovo, prima di andare oltre possiamo (dobbiamo...) *verificare* che i vettori che abbiamo trovato siano effettivamente autovalori di M associati all'autovalore $\lambda_2 = 2$: dobbiamo cioè verificare che sia davvero

$$M\,v_\gamma \;=\; 2\,v_\gamma \qquad \text{per ogni vettore} \quad v_\gamma := (3\,\gamma\,,3\,\gamma\,,-2\,\gamma)\;, \quad \text{con} \quad \gamma \in \mathbb{R}\;. \tag{2}$$

Calcolando esplicitamente si ottiene

$$M\,v_\gamma \;=\; \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & 9 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\,\gamma \\ 3\,\gamma \\ -2\,\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cdot 3\,\gamma + 0\cdot 3\,\gamma + 9\cdot(-2)\,\gamma \\ 9\cdot 3\,\gamma + (-1)\cdot(-2)\,\gamma + 9\cdot 3\,\gamma \\ -4\cdot 3\,\gamma + 0\cdot 3\,\gamma + (-4)\cdot(-2)\,\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,\gamma \\ 6\,\gamma \\ -4\,\gamma \end{pmatrix} = 2\,v_\gamma$$

per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$, e quindi la (2) è effettivamente verificata.

Come prima, anche questa è una verifica soltanto parziale! Infatti, essa ci garantisce che i vettori della forma $v_\alpha := (0,\alpha,0)$ sono effettivamente autovettori di autovalore 2 , per cui l'autospazio V_2 certamente *contiene* il sottospazio $\big\{(3\,\gamma\,,3\,\gamma\,,-2\,\gamma) \,\big|\, \gamma \in \mathbb{R}\big\}$, e però questo non ci assicura che V_2 *coincida* con tale sottospazio, che è quanto abbiamo trovato in precedenza.

(c) Dalla teoria generale, sappiamo che una matrice quadrata di ordine n è diagonalizzabile se e soltanto se la somma delle molteplicità *geometriche* di tutti i suoi autovalori è pari all'ordine n . Ora, nel caso in esame l'ordine di M è 3, e nel risolvere il punto *(b)* abbiamo trovato che le molteplicità geometriche dei due autovalori di M sono $m_g(-1) = 1$ e $m_g(2) = 1$. Pertanto, la somma delle molteplicità di tutti gli autovalori di M è $m_g(-1) + m_g(2) = 1 + 1 = 2$, e $2 \lneqq 3$.

Si conclude allora che *la matrice M non è diagonalizzabile.* $\square$

(continua...)

[3] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Determinare se la matrice A sia invertibile oppure no; in caso affermativo, calcolare esplicitamente la matrice inversa A^{-1}, in caso negativo calcolare un vettore non nullo appartenente al nucleo di A.

(b) Determinare se il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ con $\mathbf{b}_1 := (3,-1,1)^T$ sia compatibile; in caso affermativo, calcolarne esplicitamente una soluzione.

(c) Determinare se il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ con $\mathbf{b}_2 := (-2,0,1)^T$ sia compatibile; in caso affermativo, calcolarne esplicitamente una soluzione.

Soluzione : Presentiamo due diversi metodi, ugualmente validi.

1º metodo : Per ottimizzare il lavoro, seguiamo un approccio uniforme alle richieste in *(a)*, *(b)* e *(c)*. Infatti, ci si chiede di discutere e (eventualmente) risolvere due sistemi — in *(b)* e *(c)* — che sono *simultanei*, cioè hanno la stessa matrice dei coefficienti, in questo caso A. Ma anche discutere l'invertibilità e (eventualmente) calcolare l'inversa di A corrisponde esattamente a discutere e, se possibile, risolvere altri tre sistemi lineari simultanei, precisamente quelli in cui la matrice dei coefficienti (comune) è di nuovo A, mentre le colonne dei termini noti sono precisamente $\mathbf{e}_1 := (1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2 := (0,1,0)^T$ ed $\mathbf{e}_3 := (0,0,1)^T$. Pertanto, complessivamente dobbiamo discutere e — se possibile — risolvere cinque sistemi simultanei. Per far questo, possiamo operare simultaneamente con tutti i sistemi considerando un'unica "matrice completa complessiva", di forma 3×8, per i cinque sistemi, che indichiamo con C ed è fatta così: a sinistra, a "riempire" le prime tre colonne, mettiamo la matrice dei coefficienti (comune) A, e alla sua destra accostiamo, nell'ordine, i cinque vettori colonna dei termini noti, ponendo prima $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — che complessivamente formano la matrice identità I_3 — e poi $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$. Dunque abbiamo

$$C := \big(\, A \,\big|\, I_3 \,\big|\, \mathbf{b}_1 \,\big|\, \mathbf{b}_2 \,\big) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{matrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \quad \underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{(\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2)} \right)$$

e operando su quest'unica matrice, possiamo simultaneamente:

— studiare l'invertibilità di A, e in caso affermativo calcolarne l'inversa (problema *(a)*),

— studiare la compatibilità del sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, e in caso affermativo calcolarne una soluzione (problema *(b)*),

— studiare la compatibilità del sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$, e in caso affermativo calcolarne una soluzione (problema *(c)*).

A questo punto, il procedimento da seguire si svolge secondo i passi qui elencati:

— *passo 1 :* Operiamo sulla matrice C un procedimento di eliminazione di Gauss in modo da ridurre la sottomatrice (quadrata di ordine 3) costituita dalle prime tre colonne di C, cioè $C_{1,2,3}^{1,2,3} = A$, a *forma triangolare* superiore (oppure inferiore, a scelta): indichiamo con E la matrice ottenuta da C in questo modo, e con T la matrice triangolare ottenuta da $C_{1,2,3}^{1,2,3} = A$ con le stesse operazioni — *N.B.:* si noti che T è proprio (di nuovo) la sottomatrice di E costituita dalle (prime tre righe e dalle) prime tre colonne di E: in simboli, $T = E_{1,2,3}^{1,2,3}$.

— *passo 2:* il numero r dei pivot (= elementi non nulli sulla diagonale) della matrice T è pari al *rango* di A, e quindi ne deduciamo che A è invertibile se e soltanto se $r = 3$.

— *passo 3:* indichiamo con E^7 la settima colonna della matrice E: allora il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ è compatibile se e soltanto $rg\big(T \,\big|\, E^7\big) = rg\big(T\big)$, cioè se e soltanto se la colonna E^7 ha tutti elementi pari a zero nelle righe al di sotto (se l'eliminazione di Gauss era all'ingiù, altrimenti al di sopra) della r–esima. In particolare, *se* $r = 3$ *allora il sistema* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ *è certamente compatibile*, con soluzione unica data da $\mathbf{x}_1 = A^{-1}\,\mathbf{b}_1$.

— *passo 4:* indichiamo con E^8 l'ottava colonna della matrice E: allora il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ è compatibile se e soltanto $rg\big(T \,\big|\, E^8\big) = rg\big(T\big)$, cioè se e soltanto se la colonna E^8 ha tutti elementi pari a zero nelle righe al di sotto (se l'eliminazione di Gauss era all'ingiù, altrimenti al di sopra) della r–esima. In particolare, *se* $r = 3$ *allora il sistema* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ *è certamente compatibile*, con soluzione unica data da $\mathbf{x}_2 = A^{-1}\,\mathbf{b}_2$.

— *passo 5:* se A è invertibile, procediamo a calcolarne l'inversa A^{-1} effettuando una elminazione di Gauss nel senso inverso a prima (dunque, all'insù se prima l'abbiamo fatta all'ingiù, e viceversa nel caso opposto), e poi dividendo ciascuna riga per il pivot corrispondente: nella matrice 3×8 così ottenuta, che chiamiamo F, le colonne F^4, F^5 e F^6 formeranno allora la matrice A^{-1} cercata.

— *passo 6:* se il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_j$ (con $j = 1$ oppure $j = 2$) è compatibile, allora procediamo a calcolarne una soluzione (che sarà unica se e soltanto se $rg(A) = 3$) in modo analogo a quanto fatto al passo 5 per calcolare A^{-1} (ci sarà però qualche differenza nel caso in cui sia $rg(A) \lneqq 3$). Se *entrambi* i sistemi sono compatibili, allora le operazioni da fare sono esattamente le stesse. Inoltre, se A è invertibile, allora $rg(A) = 3$ e entrambi i sistemi suddetti sono compatibili, con soluzione unica: in entrambi i casi, *tale soluzione si ricava esattamente con le stesse operazioni effettuate al passo 5 per calcolare* A^{-1}, e sarà data dalla colonna F^7 per il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e dalla colonna F^8 per il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$.

<u>N.B.</u> : *l'ordine in cui devono essere svolti i passi su menzionati non è completamente prefissato.* Ad esempio, i passi 2, 3 e 4 si possono svolgere in un ordine qualsiasi (anche se conviene svolgere prima il passo 2) e analogamente i passi 5 e 6 si possono svolgere in un ordine qualsiasi (e però conviene svolgere prima il passo 5).

A questo punto passiamo finalmente ai calcoli. Cominciamo con un procedimento di eliminazione di Gauss all'ingiù, che ci dà

$$C := \big(A \,\big|\, I_3 \,\big|\, \mathbf{b}_1 \,\big|\, \mathbf{b}_2\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e II riga}}$$

$$\xrightarrow{\text{scambio I e II riga}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III} + 1\cdot\text{I}]{\text{II} \mapsto \text{II}}$$

$$\xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III} + 1\cdot\text{I}]{\text{II} \mapsto \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III} + 1\cdot\text{II}]{}$$

$$\xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III} + 1\cdot\text{II}]{} \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{T} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{matrix} \end{matrix}\right) = \big(T \,\big|\, E^4 \,\big|\, E^5 \,\big|\, E^6 \,\big|\, E^7 \,\big|\, E^8\big) =: E$$

Abbiamo svolto così il passo 1. Ora procediamo con i successivi passi 2, 3 e 4.

Guardando la sottomatrice (triangolare) $T := E^{1,2,3}_{1,2,3}$ in E troviamo che essa ha tre pivot, tutti uguali a 1. Perciò $rg(A) = rg(T) = 3$, quindi, per l'analisi fatta in precedenza, deduciamo che

A è invertibile, e entrambi i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ sono compatibili, con soluzione unica data rispettivamente da $\mathbf{x}_1 = A^{-1}\mathbf{b}_1$ (per il primo) e $\mathbf{x}_2 = A^{-1}\mathbf{b}_2$ (per il secondo).

Proseguiamo ora con i passi finali 5, 6 e 7, con un unico calcolo simultaneo.

Operiamo dunque un procedimento di eliminazione di Gauss all'insù sulla matrice E — "tarata" però sulle sue prime tre colonne — il che dà

$$E \;:=\; \left(T \,\middle|\, E^4 \,\middle|\, E^5 \,\middle|\, E^6 \,\middle|\, E^7 \,\middle|\, E^8\right) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}+1\cdot\mathrm{III}]{\mathrm{I}\,\mapsto\,\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{III}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II}+1\cdot\mathrm{III}]{\mathrm{I}\,\mapsto\,\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}\,\mapsto\,\mathrm{I}+(-1)\cdot\mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}\,\mapsto\,\mathrm{I}+(-1)\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc}\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} & \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 3 & -1 \end{matrix}}_{\left(\mathbf{x}_1 \middle| \mathbf{x}_2\right)}\end{array}\right) \;=\; \left(I_3 \,\middle|\, A^{-1} \,\middle|\, \mathbf{x}_1 \,\middle|\, \mathbf{x}_2\right) \;=\; F$$

Il risultato finale è la matrice F (di forma 3×8) che cercavamo: in essa, le colonne 4, 5 e 6 ci danno la matrice A^{-1} richiesta, mentre le colonne 7 e 8 ci danno le soluzioni (uniche!) $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ rispettivamente del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$. Dunque

$$A^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{x}_1 \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{x}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

VERIFICA: Arrivati a questo punto, prima di proseguire possiamo, e moralmente *dobbiamo*, fare una *verifica*: precisamente, verificare che il prodotto di matrici $A \cdot A^{-1}$ oppure $A^{-1} \cdot A$ (è sufficiente verificare uno dei due) dia come risultato I_3 , la matrice identità di ordine 3, e che i prodotti $A \cdot \mathbf{x}_1$ e $A \cdot \mathbf{x}_2$ diano come risultato rispettivamente $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$. Ora, il calcolo esplicito dà

$$A \cdot A^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 & (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: I_3$$

e analogamente

$$A^{-1}\cdot A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \;=$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot(-1) & 0\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot(-2) & 0\cdot(-1)+2\cdot(-2)+1\cdot 4 \\ 2\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+1\cdot(-2)+1\cdot 4 \\ 1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+1\cdot(-2)+1\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: I_3$$

e così anche

$$A\cdot\mathbf{x}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-1)+1\cdot 6+(-1)\cdot 3 \\ 1\cdot(-1)+1\cdot 6+(-2)\cdot 3 \\ (-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot 6+4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_1$$

$$A\cdot\mathbf{x}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+1\cdot(-3)+(-1)\cdot(-1) \\ 1\cdot 1+1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 1+(-2)\cdot(-3)+4\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}_2$$

e dunque le soluzioni calcolate sono effettivamente corrette!

2^o metodo: Procediamo affrontando i problemi in *(a)*, *(b)* e *(c)* separatamente — salvo che, come vedremo, saranno in parte collegati...

(a) Per questo primo punto possiamo seguire due diversi approcci:

1^o approccio : La matrice A è invertibile se e soltanto se è non singolare, cioè in una qualsiasi sua riduzione a forma triangolare — tramite eliminazione di Gauss — i suoi pivot (= coefficienti sulla diagonale) sono tutti non nulli. Per procedere su questa strada, e simultaneamente impostare il calcolo della matrice inversa A^{-1}, operiamo un procedimento di eliminazione di Gauss all'ingiù (con calcoli analoghi a prima) sulla matrice $\big(A\,\big|\,I_3\big)$, ottenendo

$$\big(A\,\big|\,I_3\big) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambio I e II riga}}$$

$$\xrightarrow{\text{scambio I e II riga}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}\mapsto\text{III}+1\cdot\text{I}}$$

$$\xrightarrow{\text{III}\mapsto\text{III}+1\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}\mapsto\text{III}+1\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\phantom{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \end{array}}}_{T_A}$$

dove nell'ultima matrice la sottomatrice formata dalle prime tre colonne, che indichiamo con T_A , è in forma triangolare (superiore), dunque è una riduzione di A a forma triangolare (superiore). Dato che i pivot di A sono tutti diversi da 0, si conclude che A è non singolare, e quindi, per quanto già osservato, A *è invertibile.*

Di passaggio, osserviamo anche che questi calcoli ci permettono di calcolare il valore del determinante di A, che sarà dato dal prodotto dei pivot di T_A per $(-1)^\sigma$ dove σ è il numero di scambi di righe effettuati nel processo di eliminazione di Gauss che porta da A a T_A. In questo caso i pivot sono $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ e $\sigma = 1$, quindi

$$det(A) \;=\; (-1)^\sigma \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \;=\; (-1)^1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \;=\; 1$$

A questo punto dobbiamo operare sull'ultima matrice con un'eliminazione di Gauss all'insù, "tarata" sulla sottomatrice T_A; sarà invece superfluo l'ultimo passaggio — la divisione di ciascuna riga per il pivot corrispondente — perché tali pivot sono appunto tutti pari a 1. Dunque per il secondo passo abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + 1 \cdot \mathrm{III}]{\mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} + 2 \cdot \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 1 \cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 1 \cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} & \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{pmatrix} \;=\; \left(I_3 \,\middle|\, A^{-1} \right)$$

Nel risultato, le ultime tre colonne della matrice ottenuta ci danno appunto la matrice A^{-1} cercata.

<u>*2º approccio*</u> *:* La matrice A è invertibile se e soltanto se il suo determinante è diverso da zero. Ora, il calcolo diretto — tramite la regola di Sarrus — ci dà

$$det(A) \;=\; det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \;=$$

$$= \; 0 \cdot 1 \cdot 4 \,+\, 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \,+\, 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \,-\, (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \,-\, 1 \cdot 1 \cdot 4 \,-\, 0 \cdot (-2) \cdot (-2) \;=$$

$$= \; 0 + 2 + 2 - 1 - 4 - 0 \;=\; -1 \;\neq\; 0$$

(in particolare ritroviamo $det(A) = -1$ come già osservato in precedenza!), così possiamo concludere che A *è invertibile*.

Ora per calcolare la matrice inversa A^{-1} possiamo usare la formula esplicita, che ci dice che

$$A^{-1} = \big(\alpha_{i,j}\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;} \qquad \text{con} \qquad \alpha_{i,j} \,:=\, (-1)^{i+j}\, det\big(A_{j,i}\big) \cdot det(A)^{-1} \qquad \forall\; i,j = 1,\dots,n \tag{3}$$

dove $A_{j,i}$ indica la sottomatrice di A ottenuta cancellando (da M) la j–esima riga e la i–esima colonna (in campana, attenti allo scambio di indici!!!).

Nel caso in esame abbiamo $det(A) = -1$, quindi $det(A)^{-1} = (-1)^{-1} = -1$, e inoltre

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Perciò, visto che il determinante di una matrice 2×2 è dato da $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c$, si ha

$$\alpha_{1,1} = det\big(A_{1,1}\big) = 0 \ , \qquad \alpha_{1,2} = det\big(A_{2,1}\big) = 2 \ , \qquad \alpha_{1,3} = det\big(A_{3,1}\big) = -1$$

$$\alpha_{2,1} = det\big(A_{1,2}\big) = 2 \ , \qquad \alpha_{2,2} = det\big(A_{2,2}\big) = -1 \ , \qquad \alpha_{2,3} = det\big(A_{3,2}\big) = 1$$

$$\alpha_{3,1} = det\big(A_{1,3}\big) = -1 \ , \qquad \alpha_{3,2} = det\big(A_{2,3}\big) = 1 \ , \qquad \alpha_{3,3} = det\big(A_{3,3}\big) = -1$$

Pertanto, da questi calcoli e da (3) otteniamo infine

$$A^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} +\alpha_{1,1} & -\alpha_{1,2} & +\alpha_{1,3} \\ -\alpha_{2,1} & +\alpha_{2,2} & -\alpha_{2,3} \\ +\alpha_{3,1} & -\alpha_{3,2} & +\alpha_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{1,1} & +\alpha_{1,2} & -\alpha_{1,3} \\ +\alpha_{2,1} & -\alpha_{2,2} & +\alpha_{2,3} \\ -\alpha_{3,1} & +\alpha_{3,2} & -\alpha_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che è lo stesso risultato già ottenuto in precedenza (e anche verificato!...).

(b)–(c) Il secondo e terzo punto possono essere trattati in parallelo, di nuovo seguendo due diversi approcci:

1º approccio : Poiché la matrice A è invertibile, per *(a)*, essa è anche non singolare, e quindi

i sistemi lineari $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ *e* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ *sono entrambi compatibili, con una e una sola soluzione*

perché entrambi sono sistemi (lineari) con matrice dei coefficienti quadrata non-singolare. Tale soluzione (unica!) può essere calcolata tramite la formula data dal *Teorema di Cramer*, cioè

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} det\Big(B^1_{(1)}\Big) \cdot det(A)^{-1} \\ det\Big(B^2_{(1)}\Big) \cdot det(A)^{-1} \\ det\Big(B^3_{(1)}\Big) \cdot det(A)^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} B^1_{(1)} := \big(\,\mathbf{b}_1 \,\big|\, A^2 \,\big|\, A^3\,\big) \\ B^2_{(1)} := \big(\,A^1 \,\big|\, \mathbf{b}_1 \,\big|\, A^3\,\big) \\ B^3_{(1)} := \big(\,A^1 \,\big|\, A^2 \,\big|\, \mathbf{b}_1\,\big) \end{array} \quad \text{per} \quad A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

— dove come sempre A^1, A^2 e A^3 sono rispettivamente la prima, la seconda e la terza colonna della matrice A — e analogamente

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} det\Big(B^1_{(2)}\Big) \cdot det(A)^{-1} \\ det\Big(B^2_{(2)}\Big) \cdot det(A)^{-1} \\ det\Big(B^3_{(2)}\Big) \cdot det(A)^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} B^1_{(2)} := \big(\,\mathbf{b}_2 \,\big|\, A^2 \,\big|\, A^3\,\big) \\ B^2_{(2)} := \big(\,A^1 \,\big|\, \mathbf{b}_2 \,\big|\, A^3\,\big) \\ B^3_{(2)} := \big(\,A^1 \,\big|\, A^2 \,\big|\, \mathbf{b}_2\,\big) \end{array} \quad \text{per} \quad A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

Passando ai calcoli, abbiamo (usando ad esempio la regola di Sarrus)

$$det\Big(B^1_{(1)}\Big) = det\big(\,\mathbf{b}_1 \,\big|\, A^2 \,\big|\, A^3\,\big) = det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 12+(-2)+(-2)-(-1)-12-(-4) = 1$$

$$det\Big(B^2_{(1)}\Big) = det\big(\,A^1 \,\big|\, \mathbf{b}_1 \,\big|\, A^3\,\big) = det\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0+6+(-1)-(-1)-12-0 = -6$$

$$det\Big(B^3_{(1)}\Big) = det\big(\,A^1 \,\big|\, A^2 \,\big|\, \mathbf{b}_1\,\big) = det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0+1+(-6)-(-3)-1-0 = -3$$

$$det(A) = det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 0+2+2-1-4-0 = -1$$

$$det\left(B^1_{(2)}\right) \;=\; det\left(\,\mathbf{b}_2 \,\middle|\, A^2 \,\middle|\, A^3\,\right) \;=\; det\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -8+(-2)+0-(-1)-0-(-8) \;=\; -1$$

$$det\left(B^2_{(2)}\right) \;=\; det\left(\,A^1 \,\middle|\, \mathbf{b}_2 \,\middle|\, A^3\,\right) \;=\; det\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0+(-4)+(-1)-0-0-(-8) \;=\; 3$$

$$det\left(B^3_{(2)}\right) \;=\; det\left(\,A^1 \,\middle|\, A^2 \,\middle|\, \mathbf{b}_2\,\right) \;=\; det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0+0+4-2-1-0 \;=\; 1$$

e quindi in conclusione troviamo

$$\mathbf{x}_1 \;=\; \begin{pmatrix} det\left(B^1_{(1)}\right)\cdot det(A)^{-1} \\ det\left(B^2_{(1)}\right)\cdot det(A)^{-1} \\ det\left(B^3_{(1)}\right)\cdot det(A)^{-1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) \\ -6\cdot(-1) \\ -3\cdot(-1) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{soluzione di} \quad A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{x}_2 \;=\; \begin{pmatrix} det\left(B^1_{(2)}\right)\cdot det(A)^{-1} \\ det\left(B^2_{(2)}\right)\cdot det(A)^{-1} \\ det\left(B^3_{(2)}\right)\cdot det(A)^{-1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1\cdot(-1) \\ 3\cdot(-1) \\ 1\cdot(-1) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{soluzione di} \quad A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

che sono giusto le soluzioni già trovate — e verificate! — in precedenza.

2º approccio : Poiché la matrice A è invertibile, esiste la sua matrice inversa A^{-1}, e quindi

i sistemi lineari $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ sono entrambi compatibili, con una e una sola soluzione che è data rispettivamente da $\mathbf{x}_1 = A^{-1}\,\mathbf{b}_1$ per $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ e $\mathbf{x}_2 = A^{-1}\,\mathbf{b}_2$ per $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$.

Infatti, in entrambi i casi tale risultato segue facilmente dal fatto che (per $i = 1, 2$)

$$A\,\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i \quad\Longleftrightarrow\quad A^{-1}A\,\mathbf{x}_i = A^{-1}\,\mathbf{b}_i \quad\Longleftrightarrow\quad I_3\,\mathbf{x}_i = A^{-1}\,\mathbf{b}_i \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{x}_i = A^{-1}\,\mathbf{b}_i$$

Allora, grazie alla forma esplicita di A^{-1} calcolata al punto A abbiamo le soluzioni

$$\mathbf{x}_1 \;=\; A^{-1}\,\mathbf{b}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 3+2\cdot(-1)+1\cdot 1 \\ 2\cdot 3+1\cdot(-1)+1\cdot 1 \\ 1\cdot 3+1\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{per} \;\; A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{x}_2 \;=\; A^{-1}\,\mathbf{b}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-2)+2\cdot 0+1\cdot 1 \\ 2\cdot(-2)+1\cdot 0+1\cdot 1 \\ 1\cdot(-2)+1\cdot 0+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{per} \;\; A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

e così ritroviamo ancora una volta le soluzioni (corrette) già trovate in precedenza. □

(continua...)

[4] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si considerino i quattro vettori

$$w_1 := \big(-2\,,0\,,5\,,5\big)\,,\ \ w_2 := \big(1\,,2\,,0\,,3\big)\,,\ \ w_3 := \big(-3\,,-2\,,5\,,2\big)\,,\ \ w_4 := \big(3\,,0\,,4\,,4\big)$$

e il sottospazio vettoriale $W := Span(w_1, w_2, w_3, w_4)$ generato da tali vettori.

(a) Determinare la dimensione di W.

(b) Determinare una base di W.

(c) Determinare tutti gli eventuali valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore

$$v(t) \;:=\; \big(4\,t\,,\,-t+5\,,\,2\,t-7\,,\,3\,t-2\big)$$

appartenga al sottospazio W.

Soluzione : Risolviamo i problemi proposti seguendo due diversi metodi:

<u>*1º metodo*</u> *:* Per ottimizzare il lavoro, e affrontare con un approccio uniforme le richieste in *(a)*, *(b)* e *(c)*, conviene procedere come segue. Consideriamo la matrice

$$C(t) \;:=\; \Big(\,w_1^T\,\Big|\,w_2^T\,\Big|\,w_3^T\,\Big|\,w_4^T\,\Big|\,v(t)^T\,\Big) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 & 4\,t \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -t+5 \\ 5 & 0 & 5 & 4 & 2\,t-7 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 3\,t-2 \end{pmatrix}$$

dipendente da $t \in \mathbb{R}$, che ha i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 e $v(t)$ — in quest'ordine — come *colonne*. Riduciamo ora tale matrice in forma a scala (superiore), e analizziamo in quali posizioni si trovano i suoi pivot. Il calcolo esplicito ci dà

$$C(t) \;:=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 & 4\,t \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -t+5 \\ 5 & 0 & 5 & 4 & 2\,t-7 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 3\,t-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}\,\mapsto\,\text{IV}+5/2\cdot\text{I}]{\substack{\text{II}\,\mapsto\,\text{II} \\ \text{III}\,\mapsto\,\text{III}+5/2\cdot\text{I}}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 & 4\,t \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -t+5 \\ 0 & 5 & -5 & 23 & 24\,t-14 \\ 0 & 11 & -11 & 23 & 26\,t-4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{IV}\,\mapsto\,\text{IV}-11/2\cdot\text{II}]{\text{III}\,\mapsto\,\text{III}-5/2\cdot\text{II}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 & 4\,t \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -t+5 \\ 0 & 0 & 0 & 46 & 53\,t-53 \\ 0 & 0 & 0 & 46 & 63\,t-63 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}\,\mapsto\,\text{IV}-\text{III}]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 & 4\,t \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -t+5 \\ 0 & 0 & 0 & 46 & 53\,t-53 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10\,t-10 \end{pmatrix}$$

Ora, la matrice finale — in fondo a destra — che indichiamo con $S(t)$ per comodità, è in forma a scala (superiore): i suoi pivot sono $p_1 := -2$, $p_2 := 2$ e $p_3 := 46$, nelle colonne 1, 2 e 4 rispettivamente, e eventualmente anche $p_4(t) := 10\,t - 10$ *allorché questo è diverso da zero*, cioè precisamente per ogni $t \neq 1$. Come conseguenza, abbiamo che:

— *(a):* Poiché nelle prime quattro colonne di $S(t)$ — cioè quelle che corrispondono alle prime quattro colonne di $C(t)$, formate dai quattro vettori w_1, w_2, w_3 e w_4 generatori di $W := Span(w_1, w_2, w_3, w_4)$ — vi sono esattamente tre pivot, *il sottospazio W ha dimensione* 3.

— *(b):* Poiché i tre pivot che si trovano nelle prime quattro colonne di $S(t)$ — corrispondenti alle colonne di $C(t)$ formate dai vettori w_1, w_2, w_3 e w_4 generatori di $W := Span(w_1, w_2, w_3, w_4)$ — stanno nelle colonne 1, 2 e 4, *l'insieme $B_W := \{w_1, w_2\,, w_4\}$ è una base del sottospazio W.*

— *(c):* Poiché $p_4(t) := 10\,t - 10 = 0$ se e soltanto se $t = 1$, si ha $rg\big(C(t)\big) = rg\big(S(t)\big) = 3$ se e soltanto se $t = 1$. Quindi la quinta colonna di $C(t)$, cioè $v(t)$, è linearmente dipendente dalle prime quattro, cioè dai vettori w_1, w_2, w_3 e w_4, *se e soltanto se* $t = 1$. Perciò, in conclusione, abbiamo che $v(t) \in W \iff t = 1$.

<u>*2ºmetodo*</u> *:* Affrontiamo prima i punti *(a)* e *(b)* — congiuntamente — e a seguire il punto *(c)*.

(a)–(b) Consideriamo la matrice

$$G \;:=\; \left(w_1^T \,\middle|\, w_2^T \,\middle|\, w_3^T \,\middle|\, w_4^T \right) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha i vettori w_1, w_2, w_3 e w_4 (nell'ordine) come *colonne*. Riduciamo tale matrice in forma a scala (superiore), e analizziamo in quali posizioni si trovano i suoi pivot. Il calcolo esplicito — ripreso da quanto fatto nel primo metodo: basta ignorare l'ultima colonna! — ci dà

$$G \;:=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}\,\mapsto\,\mathrm{IV}+5/2\cdot\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}\,\mapsto\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}+5/2\cdot\mathrm{I}}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 23 \\ 0 & 11 & -11 & 23 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}\,\mapsto\,\mathrm{IV}-11/2\cdot\mathrm{II}]{\mathrm{III}\,\mapsto\,\mathrm{III}-5/2\cdot\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 46 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}\,\mapsto\,\mathrm{IV}-\mathrm{III}]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_G$$

Ora, la matrice finale S_G è in forma a scala (superiore), con pivot $p_1 := -2$, $p_2 := 2$ e $p_3 := 46$ nelle colonne 1, 2 e 4 rispettivamente. Pertanto possiamo dedurne che:

— *(a):* siccome nelle prime quattro colonne di S_G — quelle corrispondenti alle prime quattro colonne di G, formate dai quattro vettori w_1, w_2, w_3 e w_4 generatori di $W := Span(w_1, w_2, w_3, w_4)$ — vi sono esattamente tre pivot, *la dimensione del sottospazio W è esattamente* 3;

— *(b):* siccome i tre pivot che si trovano nelle prime quattro colonne di S_G — che corrispondono alle colonne di G formate dai vettori w_1, w_2, w_3 e w_4 generatori di $W := Span(w_1, w_2, w_3, w_4)$ — stanno nelle colonne 1, 2 e 4, *l'insieme $B_W := \{w_1, w_2, w_4\}$ è una base del sottospazio W*.

(c) Consideriamo la nuova matrice (dipendente da $t \in \mathbb{R}$)

$$M(t) \;:=\; \left(w_1^T \,\middle|\, w_2^T \,\middle|\, w_4^T \,\middle|\, v(t)^T \right) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4t \\ 0 & 2 & 0 & -t+5 \\ 5 & 0 & 4 & 2t-7 \\ 5 & 3 & 4 & 3t-2 \end{pmatrix}$$

che ha i vettori w_1, w_2, w_4 e $v(t)$ — in quest'ordine — come *colonne*.

In forza del punto *(b)* abbiamo che $B_W := \{w_1, w_2, w_4\}$ è una base del sottospazio W. Perciò il vettore $v(t)$ apparterrà a W se e soltanto se $v(t)$ sarà combinazione lineare dei vettori w_1, w_2, w_4, quindi se e soltanto se la matrice $M(t)$ avrà *rango minore del numero di colonne*, che in questo caso è quattro. Ora, dato che $M(t)$ è una matrice quadrata il suo rango è minore del numero di colonne se e soltanto se il determinante di $M(t)$ è uguale a zero, cioè $rg\big(M(t)\big) < 4 \iff det\big(M(t)\big) = 0$; quindi abbiamo

$$v(t) \in W \quad\iff\quad det\big(M(t)\big) \;=\; 0 \tag{4}$$

Procediamo allora a calcolare il determinante di $M(t)$. Lo facciamo operando lo sviluppo di Laplace lungo la seconda riga — perché è dove c'è il massimo numero di zeri! — ottenendo così

$$det\big(M(t)\big) \;:=\; det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4t \\ 0 & 2 & 0 & -t+5 \\ 5 & 0 & 4 & 2t-7 \\ 5 & 3 & 4 & 3t-2 \end{pmatrix} \;=$$

$$= (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4\,t \\ 0 & 4 & 2\,t-7 \\ 3 & 4 & 3\,t-2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 2\cdot det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4\,t \\ 5 & 4 & 2\,t-7 \\ 5 & 4 & 3\,t-2 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3}\cdot 0\cdot det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4\,t \\ 5 & 0 & 2\,t-7 \\ 5 & 3 & 3\,t-2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4}\cdot(-t+5)\cdot det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 + 2\cdot\big(-8\,(3\,t-2)+15\,(2\,t-7)+80\,t-80\,t+8\,(2\,t-7)-15\,(3\,t-2)\big)+$$

$$+0 + (-t+5)\cdot\big(0+20+45-0+24-20\big) =$$

$$= 2\cdot(-23)\,(t+5) + (-t+5)\cdot 69 = 115\,(1-t)$$

dove i determinanti delle sottomatrici di ordine tre sono stati calcolati usando la regola di Sarrus.

Dunque abbiamo $det\big(M(t)\big) = 115\,(1-t)$, e quindi $det\big(M(t)\big)=0 \iff t=1$. Alla luce della (4), possiamo allora concludere che

$$v(t)\in W \iff t = 1$$

che è appunto il risultato che avevamo già ottenuto con il primo metodo. $\square$