GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2009/2010

prof. Fabio GAVARINI

Esame scritto del 16 Febbraio 2010

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . * . . . .

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico, si consideri il sottospazio $W := \mathit{Span}(w_1, w_2, w_3)$ generato dai tre vettori

$$w_1 := (1,1,0,0)\,,\ \ w_2 := (1,0,0,-1)\,,\ \ w_3 := (0,1,0,3) \ \in\ \mathbb{R}^4 \quad .$$

(a) Determinare una base ortonormale B_W di W.

(b) Completare la base B_W del sottospazio W determinata al punto *(a)* ad una base ortonormale B_V dell'intero spazio $V := \mathbb{R}^4$.

[2] Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & 9 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathit{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Calcolare gli autovalori della matrice M.

(b) Calcolare gli autospazi della matrice M.

(c) Determinare, *giustificando la risposta*, se M sia diagonalizzabile oppure no.

(continua...)

[3] Si consideri la matrice

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \;\in\; Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Determinare se la matrice A sia invertibile oppure no; in caso affermativo, calcolare esplicitamente la matrice inversa A^{-1}, in caso negativo calcolare un vettore non nullo appartenente al nucleo di A.

(b) Determinare se il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ con $\mathbf{b}_1 := (3,-1,1)^T$ sia compatibile; in caso affermativo, calcolarne esplicitamente una soluzione.

(c) Determinare se il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ con $\mathbf{b}_2 := (-2,0,1)^T$ sia compatibile; in caso affermativo, calcolarne esplicitamente una soluzione.

[4] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si considerino i quattro vettori

$$w_1 := \big(-2\,,\,0\,,\,5\,,\,5\big)\;,\quad w_2 := \big(1\,,2\,,\,0\,,\,3\big)\;,\quad w_3 := \big(-3\,,\,-2\,,\,5\,,\,2\big)\;,\quad w_4 := \big(3\,,0\,,\,4\,,\,4\big)$$

e il sottospazio vettoriale $W := \mathit{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ generato da tali vettori.

(a) Determinare la dimensione di W.

(b) Determinare una base di W.

(c) Determinare tutti gli eventuali valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore

$$v(t) \;:=\; \big(4\,t\,,\,-t+5\,,\,2\,t-7\,,\,3\,t-2\big)$$

appartenga al sottospazio W.