GEOMETRIA

(CdL Scienze e Tecnologie per i Media)

Proff. Filippo BRACCI / Fabio GAVARINI

26 Febbraio 2013

Geometria I modulo/Algebra Lineare

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si consideri il sottospazio vettoriale $U := \mathit{Span}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ generato dai cinque vettori

$$u_1 := \big(3\,,\,-1\,,\,1\,,\,2\big)\ \ ,\quad u_2 := \big(2\,,-3\,,\,2\,,\,2\big)\ \ ,\quad u_3 := \big(1\,,\,2\,,\,-1\,,\,0\big)$$
$$u_4 := \big(0\,,7\,,\,-4\,,\,2\big)\ \ ,\qquad u_5 := \big(7\,,-1\,,\,3\,,\,0\big)$$

e inoltre il vettore $v := \big(7\,,\,4\,,\,0\,,\,-2\big)$.

(a) Si determini la dimensione di U.

(b) Si determini una base B_U di U che sia contenuta nell'insieme $\big\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\big\}$ dei generatori di U assegnati.

(c) Si determini una base B di $V := \mathbb{R}^4$ contenente la base B_U di U trovata al punto *(b)*.

(d) Si stabilisca, giustificando la risposta, se il vettore v appartenga al sottospazio U o no.

(e) Si calcolino le coordinate di v rispetto alla base B di $V := \mathbb{R}^4$ trovata al punto *(c)*.

[2] Si consideri la matrice quadrata

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -6 & 7 & 2 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathit{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Determinare se alcuni (e quali) tra i numeri nell'insieme $\big\{-2\,,-1\,,0\,,1\,,2\,\big\}$ siano autovalori di A.

(b) Determinare se la matrice A ammetta una matrice inversa oppure no. Se la risposta è affermativa, calcolare esplicitamente la matrice inversa A^{-1}; se invece è negativa, calcolare esplicitamente un vettore *non nullo* che sia contenuto nel nucleo della matrice A.

(c) Determinare se il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} := (4\,,9\,,8)^T$ sia compatibile; in caso affermativo, calcolarne esplicitamente tutte le soluzioni.

Geometria II modulo/Metodi Numerici per la Grafica I

1) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ siano fissate coordinate omogenee $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$. Sia $\hat{r}$ la retta proiettiva che contiene i punti $[1 : 0 : 0 : 1]$ e $[0 : -1 : -1 : 0]$. Sia $\hat{s}$ la retta di equazione $x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

1. Trovare l'equazione cartesiana e parametrica di $\hat{r}$. Dire, motivando la risposta, se esiste un piano $\hat{\pi}$ che contiene $\hat{s}$ e $\hat{r}$.

2. Determinare tutte le proiettività di $\mathbb{P}^3$ che fissano puntualmente sia $\hat{r}$ che $\hat{s}$.

3. Considerando l'immersione dello spazio affine $\mathbb{A}^3$ in $\mathbb{P}^3$ data da $(x, y, z) \mapsto [x : y : z : 1]$ sia s la parte affine di $\hat{s}$. Determinare un sistema di riferimento affine ortonormale $\{O'; x', y', z'\}$ in $\mathbb{A}^3$ tale che la retta s sia data da $x' = y' = 0$.

2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano fissate coordinate $\{x, y, z\}$. Sia $O = (0, 0, 0)$ e sia π_t il piano $y + z = t$ con $t \geq 1$.

1. Siano $T_t = (1, t, 0)$ e $F_t = (0, 0, t)$. Rispetto alla proiezione centrale da O su π_t, determinare la retta r_t la cui traccia è T_t e il cui fuoco è F_t.

2. Determinare la proiezione ortogonale O'_t di O su π_t.

3. Sia A_t il triangolo di vertici O, O'_t, F_t. Determinare l'area del triangolo A_t e determinare per quale t il triangolo ha area minima.