GEOMETRIA

Proff. Filippo BRACCI / Fabio GAVARINI

Appello II — 24 Settembre 2012

Geometria I modulo/Algebra Lineare

[1] Si consideri lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico, e in esso i tre vettori

$$u_1 := (-1,0,2,1)\,,\ \ u_2 := (1,2,0,0)\,,\ \ u_3 := (0,2,2,1) \ \in\ \mathbb{R}^4$$

Infine, sia $U := \mathit{Span}\big(u_1,u_2,u_3\big)$ il sottospazio vettoriale di V generato dai suddetti vettori.

(a) Calcolare la dimensione di U.

(b) Determinare un sottoinsieme B_U di $\big\{u_1,u_2,u_3\big\}$ che sia una base di U.

(c) Calcolare esplicitamente il sottospazio $U^\perp$ in $V := \mathbb{R}^4$ formato da tutti i vettori ortogonali — rispetto al prodotto scalare canonico — ai vettori di U.

(d) Determinare una base esplicita del sottospazio $U^\perp$ considerato al punto *(c)*.

(e) Determinare una base B_V di V che contenga la base B_U di U trovata al punto *(b)*.

[2] Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathit{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

(a) Si determini quali tra i numeri nell'insieme $\big\{-1,0,1,2\big\}$ siano autovalori di A.

(b) Si determini se il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} := (5,3,-1)^T$ sia compatibile; in caso affermativo, calcolarne esplicitamente una soluzione.

(c) Si determini se la matrice A ammette una matrice inversa oppure no. In caso affermativo, si calcoli esplicitamente tale matrice inversa A^{-1}, in caso negativo invece si calcoli esplicitamente un vettore *non nullo* che sia contenuto nel nucleo della matrice A.

Geometria II modulo/Metodi Numerici per la Grafica I

[1] Nello spazio proiettivo $\mathbb{RP}^3$ siano fissate coordinate omogenee $[x_1\colon x_2\colon x_3\colon x_4]$. Si consideri l'immersione dello spazio affine $\mathbb{A}^3$ nel proiettivo data da $(x, y, z) \mapsto [x : y : z : 1]$.

1. Determinare la trasformazione affine T data dal ribaltamento rispetto al piano $x + y = 2$.
2. Determinare la proiettività $\widetilde{T}$ associata a T.
3. Determinare i piani proiettivi di $\mathbb{RP}^3$ che sono lasciati fissi come insiemi da $\widetilde{T}$.

[2] Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano fissate coordinate $\{x, y, z\}$. Sia ω il piano contenente il punto $(-1, 0, 1)$ e ortogonale al vettore $(1, 0, 1)$. Sia C un punto di $\mathbb{A}^3$ contenuto nel semispazio $x > 0$. Si consideri la proiezione centrale da C su ω.

1. Siano $P_{t,s} = (t, 0, s)$, $A = (2, 1, -2)$ e $B = (2, -1, -2)$. Determinare per quali valori di $s, t \in \mathbb{R}$ la terna $(P_{t,s}, A, B)$ individua un punto P nella proiezione centrale dal punto C sul piano ω.
2. Sia $T = (0, 1, 0)$ e sia $Q_\alpha = (2 + 2\alpha, -\alpha, -2 - 2\alpha)$. Determinare per quali valori di α la retta r la cui traccia è T e il cui punto di fuga è Q_α contiene il punto P.
3. Sapendo che la proiezione ortogonale di C su ω è data da $(1, 0, -1)$ e che la retta r di equazione $y = 1$, $z = 2$ ha punto di fuga $(0, 0, 0)$, determinare le coordinate di C.

   [*Sugg.:* si guardi l'angolo di intersezione tra la retta r e il piano ω].