Geometria
Proff. F. Bracci/ F. Gavarini

Appello II —- 20 Settembre 2011

Geometria I modulo/Algebra Lineare

1) Si considerino le tre matrici

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \qquad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare quali dei prodotti righe per colonne $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, $C \cdot A$ e $A \cdot C$ siano ben definiti, e calcolarli esplicitamente.

(b) Calcolare il determinante delle matrici considerate in *(a)* che siano quadrate.

(c) Determinare se le matrici A^2, B, B^2, C, $A \cdot B$ e $B \cdot C$ siano invertibili; per quelle che lo sono, se ne calcoli esplicitamente l'inversa.

2) Si consideri lo spazio euclideo $V := \mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico.

(a) Considerati in V i tre vettori

$$v_1 := (1,1,0,0) , \quad v_2 := (0,1,1,0) , \quad v_3 := (0,2,3,4)$$

e il sottospazio $W := \mathit{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$ da essi generato, calcolare una base ortonormale di W.

(b) Considerato l'insieme

$$L := \left\{ \ell_1 := (1,2,3,4) , \ \ell_2 := (1,-2,1,2) , \ \ell_3 := (0,1,0,-5) , \ \ell_4 := (1,2,3,-6) \right\}$$

stabilire se L sia una base di V. In caso negativo, si determini una relazione di dipendenza lineare non banale tra gli elementi di L; in caso affermativo invece, si determini se L sia ortonormale, e si calcoli la matrice del cambiamento di base dalla base canonica di $V := \mathbb{R}^4$ alla base L.

3) — soltanto per chi fa l'esame di "Algebra Lineare" — Si risolvano i due sistemi lineari $A\,\underline{x} = \underline{b}_1$ e $A\,\underline{x} = \underline{b}_2$ in cui la matrice dei coefficienti e le due colonne di termini noti sono dati rispettivamente da

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \underline{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} , \qquad \underline{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Geometria II modulo / Metodi Numerici per la Grafica I

1) Nello spazio proiettivo $\mathbb{RP}^3$ siano fissate coordinate omogenee $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$. Si consideri l'immersione dello spazio affine nel proiettivo data da $(x, y, z) \mapsto [x : y : z : 1]$.

1. Determinare l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica del piano proiettivo π che contiene la retta proiettiva r: $x_1 - x_2 - x_3 = 0, x_2 - 2x_4 = 0$ e il punto $P = [1 : 1 : 1 : 1]$.
2. Sia s la retta proiettiva la cui parte affine è parallela alla parte affine di r e contenente il punto $[1 : 1 : 1 : 1]$. Determinare equazione cartesiana e parametrica di s. Determinare se la retta s appartiene al piano π.
3. Sia t la retta proiettiva la cui parte affine è ortogonale alla parte affine di π e contenente il punto $[1 : 1 : 1 : 1]$. Determinare equazione cartesiana e parametrica di t. Determinare se la retta t appartiene al piano π.
4. Sia $A = [0 : 0 : 0 : 1]$. Determinare traccia, punto di fuga e proiezione della retta t nella proiezione da A su π,.

2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano fissate coordinate $\{x, y, z\}$. Sia r la retta di equazione $x = y, 2x - y - z = 0$. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di piani ortogonale ad r.

1. Determinare l'equazione del generico piano contenuto in $\mathcal{F}$ (generico="tutti"!).
2. Fissato un generico piano $\omega \in \mathcal{F}$, determinare il punto A_ω di intersezione tra ω e la retta r. E determinare il punto B_ω di intersezione tra il piano ω e l'asse delle z.
3. Determinare per quali piani $\omega \in \mathcal{F}$ l'area del triangolo i cui vertici sono O, A_ω, B_ω è pari a $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.
4. Fissato un generico piano $\omega \in \mathcal{F}$, determinare le coordinate di O dopo il ribaltamento rispetto al piano ω.

Geometria II modulo/Metodi Numerici per la Grafica I

1) Nel piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$ siano fissate coordinate omogenee $[x_1 : x_2 : x_3]$. Per $t \in \mathbb{R}$, sia $T_t : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$ la proiettività definita tramite $[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [2x_1 + tx_2 + x_3 : 2x_2 + x_3 : 2x_3]$.

1. Determinare i luoghi di punti fissi di T_t al variare di t.
2. Trovare l'equazione cartesiana del fascio $\mathcal{F}$ di rette proiettive che contengono il punto $[1 : 0 : 0]$.
3. Provare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ la proiettività T_t trasforma il fascio $\mathcal{F}$ in sé stesso.
4. Nella immersione del piano affine $\mathbb{A}^2$ in $\mathbb{RP}^2$ determinata da $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$, determinare se per qualche t esiste una trasformazione affine la cui proiettività associata sia T_t, e, in caso affermativo, scriverne le equazioni.

2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano fissate coordinate $\{x, y, z\}$. Sia r la retta di equazione $x = y, z - x = 0$. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di piani contenente r. Sia $O = (1, 1, 0)$. Sia ω un (generico) piano di $\mathcal{F}$ diverso da $x = y$.

1. Sia $F = (1, 1, 1)$. Rispetto alla proiezione centrale da O su π, determinare le rette per le quali il punto di fuga è F.
2. Determinare la proiezione ortogonale O'_ω di O su ω.
3. Determinare l'area del triangolo di vertici O, F, O'_ω al variare di $\omega \in \mathcal{F}$ e trovarne l'estremo inferiore.
4. Si determini le equazioni della rotazione di angolo $\pi/2$ attorno alla retta r.