Geometria
Proff. F. Bracci/ F. Gavarini

Appello I —- 6 Luglio 2010

Geometria I modulo/Algebra Lineare

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare canonico, si considerino i tre vettori

$$v_1 := (-1,2,1,0)\,,\ \ w_2 := (2,0,0,1)\,,\ \ w_3 := (0,-1,-2,1)\ \in\ \mathbb{R}^4$$

e il sottospazio vettoriale $V' := \mathit{Span}\big(v_1, v_2, v_3\big)$ di V da essi generato.

1. Dimostrare che $\mathit{dim}\big(V'\big) = 3$.
2. Determinare un vettore $v_4 \in V$ tale che $\big\{v_1, v_2, v_3, v_4\big\}$ sia una base V .
3. Determinare un vettore *non nullo* $w \in V \setminus \{0_V\}$ che sia ortogonale a V' .

[2] Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$M_t := \begin{pmatrix} t+1 & 0 & t \\ -2 & 1 & t-1 \\ -8 & 4 & 5t-4 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare il rango e il determinante della matrice M_t .
2. Verificare se la matrice M_t è invertibile oppure no. In caso affermativo, calcolare esplicitamente la matrice inversa M_t^{-1} ; in caso negativo calcolare un vettore *non nullo* appartenente al nucleo di M_t .
3. Risolvere, in tutti i casi in cui ciò sia possibile, il sistema lineare con matrice dei coefficienti pari a M_t e colonna dei termini noti pari a $\mathbf{b} := (2,1,-1)^T$.

[3] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 9 & -10 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \in \mathit{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

1. Calcolare gli autovalori della matrice A .
2. Calcolare gli autospazi della matrice A .
3. Determinare, *giustificando la risposta*, se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no.

Geometria II modulo/Metodi Numerici per la Grafica I

1) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ siano fissate coordinate omogenee $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$. Sia $\hat{r}$ la retta proiettiva che contiene i punti $[1 : 0 : 1 : 1]$ e $[1 : -1 : 1 : 1]$. Sia $\hat{s}$ la retta di equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0, 2x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$.

1. Trovare l'equazione cartesiana e parametrica di $\hat{r}$. Dire, motivando la risposta, se esiste un piano $\hat{\pi}$ che contiene $\hat{s}$ e $\hat{r}$ e, nel caso esista, trovarne una equazione cartesiana.

2. Determinare tutte le proiettivitá di $\mathbb{P}^3$ che fissano puntualmente sia $\hat{r}$ che $\hat{s}$.

3. Considerando l'immersione dello spazio affine $\mathbb{A}^3$ in $\mathbb{P}^3$ data da $(x, y, z) \mapsto [x : y : z : 1]$ sia r la parte affine di $\hat{r}$. Determinare un sistema di riferimento affine ortonormale $\{O'; x', y', z'\}$ in $\mathbb{A}^3$ tale che la retta r sia data da $x' = y' = 0$.

2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano fissate coordinate $\{x, y, z\}$. Sia $O_t = (t, 1, 1)$ con $t \in \mathbb{R}$ e sia π il piano $y + z = 1$.

1. Siano $T = (1, 1, 0)$ e $F = (0, 1, 0)$. Rispetto alla proiezione centrale da O_t in π, determinare la retta r la cui traccia è T e il cui fuoco è F.

2. Determinare la proiezione ortogonale O'_t di O_t su π.

3. Determinare la retta s parallela ad r che passa per $(0, 1, 0)$.

4. Sia C_t il punto di intersezione tra s e la retta contenente i punti O_t e O'_t. Determinare l'area del triangolo i cui vertici sono T, F, C_t e determinare per quale t il triangolo ha area minima.