GEOMETRIA

Proff. Filippo BRACCI / Fabio GAVARINI

Appello I — 4 Luglio 2012

Geometria I modulo/Algebra Lineare

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ si consideri la funzione $\langle\ ,\ \rangle_D : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\big\langle \underline{y}\,, \underline{z}\,\big\rangle_D \;:=\; \underline{y}^T \cdot D \cdot \underline{z}$$

per ogni $\underline{y} := (\,y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 =: V$, $\underline{z} := (\,z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 =: V$, dove D è la matrice diagonale $D := \mathit{diag}\big(4\,, 2\,, 1\,, 3\big)$.

(a) Verificare che $\langle\ ,\ \rangle_D$ è un prodotto scalare in V .

(b) Dati i vettori $w_1 := (-1\,, 2\,, 0\,, -3)$, $w_1 := (2\,, -1\,, 6\,, 2) \in V$, calcolare esplicitamente il sottospazio $\big\langle w_1\,, w_2\big\rangle^\perp$ in $V := \mathbb{R}^4$ formato da tutti i vettori ortogonali — rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_D$ considerato — ai vettori w_1 e w_2 .

(c) Calcolare una base esplicita del sottospazio $\big\langle w_1\,, w_2\big\rangle^\perp$ considerato al punto *(b)*.

(d) Calcolare una base ortonormale dello spazio metrico $\big(V\,, \langle\ ,\ \rangle_D\big)$.

[2] Si considerino le tre matrici

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \;,\qquad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare quali dei prodotti righe per colonne $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, $C \cdot A$ e $A \cdot C$ siano ben definiti, e calcolarli esplicitamente.

(b) Determinare se la matrice A sia invertibile oppure no. In caso affermativo, si calcoli esplicitamente la matrice inversa A^{-1} ; in caso negativo, si calcoli esplicitamente il nucleo della matrice A .

(c) Calcolare gli autovalori della matrice A .

(d) Se la matrice A è invertibile, si determinino gli autovalori della matrice inversa A^{-1} . Se invece la matrice A non è invertibile, si calcolino (esplicitamente) gli autospazi di A .

Geometria II modulo/Metodi Numerici per la Grafica I

[1] Nello spazio proiettivo $\mathbb{RP}^3$ siano fissate coordinate omogenee $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$. Si consideri l'immersione dello spazio affine nel proiettivo data da $(x, y, z) \mapsto [x : y : z : 1]$.

1. Determinare l'equazione cartesiana del piano proiettivo π la cui parte affine è ortogonale alla retta $x + y = 0, x - 2z = 1$ e contiene il punto $(0, 1, 0)$.
2. Determinare tutte le proiettività che fissano come insieme il piano $x_1 = 0$.
3. Determinare tutte le rette proiettive la cui parte affine è parallela alla retta $x + y + z = 1, x - z = 0$.

[2] Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano fissate coordinate $\{x, y, z\}$. Sia C la circonferenza di centro $(0, 0, 1)$ raggio 1 e contenuta nel piano $y = 0$. Sia $P_t = (0, 0, t)$, con $t \geq 2$ e sia ω il piano $z = 0$.

1. Determinare la proiezione di C su ω dal centro P_t al variare di t.
2. Si consideri la proiezione centrale da P_t, $t \geq 2$ su ω. Siano $T = (1, -1, 0)$ e $Q_s = (s, s - 1, 0)$ con $s \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ la retta con traccia T e punto di fuga Q_s è parallela al piano $y = 0$ e per quali valori di s è contenuta nel piano $x + y = 0$.
3. Si consideri la proiezione centrale da P_t, $t \geq 2$ su ω. Determinare l'area della proiezione del triangolo con vertici $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ e discutere per quali t si abbia il valore massimo e minimo di tale area.