Geometria
Proff. F. Bracci / F. Gavarini

Appello I — 4 Luglio 2011

— ∗ —

Geometria I modulo / Algebra Lineare

1) Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathit{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

e la matrice trasposta M^T.

(a) Determinare se M sia invertibile oppure no; in caso affermativo, calcolare esplicitamente la matrice inversa M^{-1}, in caso negativo calcolare un vettore non nullo nel nucleo di M.

(b) Rispondere ai quesiti in *(a)* per la matrice trasposta M^T.

(c) Rispondere ai quesiti in *(a)* per la matrice prodotto (righe per colonne) $M \cdot M^T$.

2) Si consideri lo spazio euclideo $V := \mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \qquad \big\langle \underline{x}\,,\,\underline{y}\big\rangle := x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + x_4\,y_4 \qquad \forall\ \underline{x}\,,\,\underline{y} \in V := \mathbb{R}^4$$

(a) Dimostrare che l'insieme

$$B := \big\{(0,-1,2,1)\,,\,(3,-3,-2,1)\,,\,(6,17,-4,25)\,,\,(2,1,1,-1)\big\}$$

è una base ortogonale di V.

(b) Determinare i coefficienti numerici che permettono di esprimere il vettore $\underline{v} := (-1,2,7,0)$ come combinazione lineare dei vettori della base B.

(c) Determinare se esista un vettore v (non necessariamente unico) tale che

$$v \in \mathit{Span}\big((0,1,0,0)\,,\,(0,0,1,0)\,,\,(0,0,0,1)\big)\ , \qquad \|v\| = 2\ , \qquad \widehat{v\,v_1} = \pi/3\ , \qquad \widehat{v\,v_2} = \pi/2$$

dove $v_1 := (-1,2,0,-2)$, $v_2 := (3,0,-1,1)$ mentre $\widehat{v\,v_1}$ e $\widehat{v\,v_2}$ sono gli angoli (convessi) formati dal vettore v con i vettori v_1 e v_2 rispettivamente.

Geometria II modulo / Metodi Numerici per la Grafica I

1) Nel piano proiettivo $\mathbb{RP}^2$ siano fissate coordinate omogenee $[x_1 : x_2 : x_3]$. Per $t \in \mathbb{R}$, sia $T_t : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$ la proiettività definita tramite $[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [2x_1+tx_2+x_3 : 2x_2+x_3 : 2x_3]$.

1. Determinare i luoghi di punti fissi di T_t al variare di t.
2. Trovare l'equazione cartesiana del fascio $\mathcal{F}$ di rette proiettive che contengono il punto $[1 : 0 : 0]$.
3. Provare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ la proiettività T_t trasforma il fascio $\mathcal{F}$ in sé stesso.
4. Nella immersione del piano affine $\mathbb{A}^2$ in $\mathbb{RP}^2$ determinata da $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$, determinare se per qualche t esiste una trasformazione affine la cui proiettività associata sia T_t, e, in caso affermativo, scriverne le equazioni.

2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ siano fissate coordinate $\{x, y, z\}$. Sia r la retta di equazione $x = y, z - x = 0$. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di piani contenente r. Sia $O = (1, 1, 0)$. Sia ω un (generico) piano di $\mathcal{F}$ diverso da $x = y$.

1. Sia $F = (1, 1, 1)$. Rispetto alla proiezione centrale da O su π, determinare le rette per le quali il punto di fuga è F.
2. Determinare la proiezione ortogonale O'_ω di O su ω.
3. Determinare l'area del triangolo di vertici O, F, O'_ω al variare di $\omega \in \mathcal{F}$ e trovarne l'estremo inferiore.
4. Si determini le equazioni della rotazione di angolo $\pi/2$ attorno alla retta r.