

# GEOMETRIA I modulo

C.d.L. Scienze e Tecnologie per i Media - a.a. 2011-2012

--- prof. Fabio GAVARINI ---

*Testo consigliato:* Marco Abate, "Algebra lineare", McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 2000

-----

## Programma definitivo del corso

Sistemi di equazioni lineari. Notazione matriciale per i sistemi: le matrici. Sistemi equivalenti. Sistemi omogenei. Sistemi simultanei. Sistemi e matrici di forma particolare. Trasposizione, matrice trasposta. Operazioni elementari su matrici o su sistemi; loro invertibilità.

Criterio di risolubilità per sistemi triangolari. Risoluzione di un sistema lineare triangolare: condizione di esistenza di soluzioni (e loro numero), e algoritmo costruttivo per trovarle.

L'eliminazione di Gauss per sistemi lineari quadrati, e triangolarizzazione di matrici quadrate: i pivot. Diagonalizzazione di sistemi e di matrici (quadrati/e) tramite doppia E.G.

Matrici singolari e matrici non-singolari (definizione tramite i pivot). Esistenza e unicità di soluzione per sistemi quadrati in termini di pivot (*vale se e soltanto se la matrice dei coefficienti è non singolare*). Risoluzione di sistemi quadrati simultanei.

Spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali. Combinazioni lineari di vettori. Il sottospazio generato da un numero finito di vettori. Sistemi di generatori di uno (sotto)spazio vettoriale.

Compatibilità di un sistema lineare in termini di appartenenza della colonna dei termini noti al sottospazio vettoriale generato dalle colonne della matrice.

Dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Unicità di soluzione di un sistema (compatibile) in termini di indipendenza lineare delle colonne della sua matrice dei coefficienti.

Basi (finita) di uno spazio vettoriale. Insiemi massimali di vettori linearmente indipendenti in uno (sotto)spazio vettoriale; relazione con le basi. Equicardinalità delle basi: tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi: dimensione di uno spazio vettoriale (caso finito). Coordinate di un vettore rispetto ad una base data.

Funzioni lineari: definizione, proprietà elementari. Corrispondenza biunivoca (isomorfismo di spazi vettoriali) tra funzioni lineari e matrici (a basi fissate).

Immagine  $Im(f)$  e nucleo  $Ker(f)$  di una funzione lineare  $f$ : definizione e proprietà fondamentali. Criteri di iniettività e suriettività di  $f$  in termini del nucleo e dell'immagine.

Rango di una funzione lineare. Teorema del rango (o "della dimensione"): Se  $f$  da  $V$  a  $W$  è lineare, allora  $rg(f) + dim(Ker(f)) = dim(V)$ .

Teorema di struttura per lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare (*ogni soluzione è somma di una soluzione particolare e di una soluzione del sistema omogeneo associato*).

Teorema di Rouché-Capelli: un sistema lineare ha soluzioni se e soltanto se i ranghi della sua matrice dei coefficienti e della sua matrice completa sono uguali. La soluzione (se esiste) è unica se e soltanto se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al numero di incognite.

Matrici a scala e loro pivot; sistemi lineari a scala.

Descrizione di  $Im(L_S)$ , calcolo di  $rg(L_S)$  e di una base di  $Im(L_S)$  per matrici a scala  $S$ . Criterio di compatibilità di un sistema a scala; risoluzione dei sistemi a scala compatibili. Calcolo di  $rg(L_A)$  e di una base di  $Im(L_A)$  mediante riduzione a scala della matrice  $A$ .

Riduzione a scala di un sistema lineare qualsiasi.

Rango-colonne e rango-righe di una matrice: definizione, maggiorazione.

Uguaglianza tra rango-colonne di una matrice e rango della funzione lineare associata.

Uguaglianza tra rango-colonne e rango-righe di una matrice (*senza dimostrazione*).

Composizione di funzioni lineari. Funzioni lineari invertibili (o *isomorfismi*).

Prodotto righe per colonne tra matrici: definizione dedotta tramite il prodotto di composizione tra funzioni lineari, deduzione della formula esplicita; proprietà fondamentali.

Invertibilità di matrici quadrate, matrice inversa. Relazione con invertibilità e inversa delle funzioni lineari associate; condizioni equivalenti per l'invertibilità di una matrice quadrata.

Metodo di calcolo dell'inversa di una matrice quadrata di ordine  $n \times n$ , tramite soluzione di  $n$  sistemi simultanei dei quali essa sia matrice dei coefficienti.

Cambiamenti di base: matrice del cambiamento di base, composizione di due o più cambiamenti di base. Variazione della matrice associata a una funzione lineare rispetto ai cambiamenti di base; caso particolare di un endomorfismo. Matrici simili.

Costruzione della funzione determinante. Calcolo del determinante tramite riduzione a forma triangolare superiore; il caso diagonale e il caso triangolare.

Definizione del determinante; esistenza e unicità, sviluppi di Laplace lungo una riga o lungo una colonna (*senza dimostrazioni*). Formule esplicite per matrici (quadrate) di ordine 1, 2, 3.

Teorema di Binet: Il determinante è moltiplicativo.

Corollario: una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha determinante diverso da zero.

Teorema di Cramer: formula esplicita della soluzione di un sistema quadrato con matrice invertibile. Formula esplicita dell'inversa di una matrice invertibile.

Teorema degli Orlati per il calcolo del rango di una matrice.

Autovettori, autovalori, spettro e autospazi di un endomorfismo. Indipendenza lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti. Molteplicità geometrica.

Criterio di diagonalizzabilità: un endomorfismo è diagonalizzabile se e soltanto se ammette una base (diagonalizzante) composta di autovettori; basi diagonalizzanti, matrici diagonalizzanti. Criterio di diagonalizzabilità in termini di autospazi e molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata, o di un endomorfismo.

Calcolo dello spettro di un endomorfismo  $T$ , come insieme delle radici del polinomio caratteristico. Calcolo degli autospazi di un endomorfismo  $T$ , come insieme delle soluzioni di opportuni sistemi lineari omogenei.

Forme bilineari, prodotti scalari in uno spazio vettoriale; spazi vettoriali metrici, norma di un vettore. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e altre proprietà notevoli del prodotto scalare in uno spazio vettoriale metrico; angoli tra vettori (in uno spazio vettoriale metrico), ortogonalità. Indipendenza lineare di vettori non nulli mutuamente ortogonali.

Basi ortogonali, basi ortonormali in uno spazio vettoriale metrico; coefficienti di Fourier rispetto a una base ortogonale. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Forme bilineari e matrici; cambiamento di matrice associata ad una forma relativo ad un cambiamento di base. Matrici congruenti.

Endomorfismi e matrici simmetrici/er o ortogonali. Caratterizzazione degli endomorfismi ortogonali; caratterizzazione delle matrici ortogonali.

---

---