GEOMETRIA I modulo

C.d.L. Scienze e Tecnologie per i Media - a.a. 2009-2010
--- prof. Fabio GAVARINI ---

Testo consigliato: Marco Abate, "Algebra lineare", McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 2000

Programma *definitivo* del corso

Sistemi di equazioni lineari. Notazione matriciale per i sistemi: le matrici. Sistemi equivalenti. Sistemi omogenei. Sistemi simultanei. Sistemi e matrici di forma particolare. Trasposizione, matrice trasposta. Operazioni elementari su matrici o su sistemi; loro invertibilità.
Criterio di risolubilità per sistemi triangolari. Risoluzione di un sistema lineare triangolare: condizione di esistenza di soluzioni (e loro numero), e algoritmo costruttivo per trovarle.

L'eliminazione di Gauss per sistemi lineari quadrati, e triangolarizzazione di matrici quadrate: i pivot. Diagonalizzazione di sistemi e di matrici tramite doppia E.G.
Matrici singolari e matrici non-singolari (definizione tramite i pivot). Esistenza e unicità di soluzione per sistemi quadrati in termini di pivot *(vale se e soltanto se la matrice dei coefficienti è non singolare).* Risoluzione di sistemi quadrati simultanei.

Spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali. Combinazioni lineari. Il sottospazio generato da un numero finito di vettori. Sistemi di generatori di uno (sotto)spazio vettoriale.
Compatibilità di un sistema lineare in termini di appartenenza della colonna dei termini noti al sottospazio vettoriale generato dalle colonne della matrice.
Dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Unicità di soluzione di un sistema (compatibile) in termini di indipendenza lineare delle colonne della sua matrice dei coefficienti.

Basi (finita) di uno spazio vettoriale. Equicardinalità delle basi: tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi: dimensione di uno spazio vettoriale (caso finito). Coordinate di un vettore rispetto ad una base data.

Applicazioni lineari: definizione, proprietà elementari. Corrispondenza biunivoca (isomorfismo di spazi vettoriali) tra applicazioni lineari e matrici (a basi fissate).

Immagine $Im(f)$ e nucleo $Ker(f)$ di una trasformazione lineare f. Criteri di iniettività e suriettività in termini del nucleo e dell'immagine.
Rango di una trasformazione lineare. Teorema del rango (o "della dimensione"): Se f da V a W è lineare, allora $rg(f) + dim(Ker(f)) = dim(V)$.

Rango-colonne e rango-righe di una matrice: definizione, maggiorazione.
Uguaglianza tra rango-colonne di una matrice e rango dell'applicazione lineare associata.
Uguaglianza tra rango-colonne e rango-righe di una matrice *(senza dimostrazione)*.

Teorema di Rouché-Capelli: un sistema lineare ha soluzioni se e soltanto se i ranghi-colonne della sua matrice dei coefficienti e della sua matrice completa sono uguali. La soluzione (se esiste) è unica se e soltanto se il rango-colonne della matrice dei coefficienti è uguale al numero di incognite.
Teorema di struttura per lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare *(ogni soluzione è somma di una soluzione particolare e di una soluzione del sistema omogeneo associato).*

Matrici a scala e loro pivot; sistemi lineari a scala.
Descrizione di di $Im(L_S)$, calcolo di $rg(L_S)$ e di una base di $Im(L_S)$ per matrici a scala S. Criterio di compatibilità di un sistema a scala. Risoluzione dei sistemi a scala. Calcolo di $rg(L_A)$ e di una base di $Im(L_A)$ mediante riduzione a scala della matrice A.
Riduzione a scala di un sistema lineare qualsiasi.

Composizione di applicazioni lineari. Trasformazioni lineari invertibili – o *isomorfismi*.
Prodotto righe per colonne tra matrici; relazione col prodotto di composizione.
Invertibilità di matrici quadrate, matrice inversa. Relazione con invertibilità e inversa delle applicazioni lineari associate; condizioni equivalenti per invertibilità di una matrice quadrata.
Metodo di calcolo dell'inversa di una matrice quadrata di ordine $n{\times}n$, tramite soluzione di n sistemi simultanei dei quali essa sia matrice dei coefficienti.

Cambiamenti di base: matrice del cambiamento di base, composizione di due o più cambiamenti di base. Variazione della matrice associata a un'applicazione lineare (in particolare, ad un endomorfismo) rispetto ai cambiamenti di base. Matrici simili.

Costruzione della funzione determinante. Calcolo del determinante tramite riduzione a forma triangolare superiore; il caso diagonale e il caso triangolare.
Definizione del determinante; esistenza e unicità, sviluppi di Laplace (per riga o per colonna). Formule esplicite per ordine 1, 2, 3.

Teorema di Binet: Il determinante è moltiplicativo.
Corollario: una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha determinante diverso da zero.
Teorema di Cramer: formula esplicita della soluzione di un sistema quadrato con matrice invertibile. Formula esplicita dell'inversa di una matrice invertibile.
Teorema degli Orlati per il calcolo del rango di una matrice.

Autovettori, autovalori, spettro e autospazi di un endomorfismo. Indipendenza lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti. Molteplicità geometrica.
Criterio di diagonalizzabilità: un endomorfismo è diagonalizzabile se e soltanto se ammette una base (diagonalizzante) di autovettori. Criterio di diagonalizzabilità in termini di autospazi e molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata, o di un endomorfismo.

Calcolo dello spettro di un endomorfismo T, come insieme delle radici del polinomio caratteristico. Calcolo degli autospazi di un endomorfismo T, come insiemi delle soluzioni di opportuni sistemi lineari omogenei.

Forme bilineari, prodotti scalari in uno spazio vettoriale; spazi vettoriali metrici, norma di un vettore. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; angoli tra vettori, ortogonalità. Indipendenza lineare di vettori mutuamente ortogonali.
Basi ortogonali, basi ortonormali; coefficienti di Fourier rispetto a una base ortogonale. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
Forme bilineari e matrici. Endomorfismi e matrici ortogonali, simmetrici o antisimmetrici.

==