GEOMETRIA III — 1999/2000

Prof. Stefano Trapani

2^{a} prova di esonero — 21/01/2000

. . . .

1) Nel piano affine complesso $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, determinare e studiare la conica $\mathcal{C}$ passante per i punti $P_1 := (0,1)$, $P_2 := (2,0)$, $P_3 := (-2,0)$, e tangente alla retta $t : x + y + 3 = 0$ nel punto $T := (-2,-1)$.

2) Nello spazio affine complesso $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$, studiare il fascio di quadriche $\mathcal{F}$ generato dalle quadriche

$$Q_1 : 3x^2 + 5z^2 + 4xz - 2yz - 2z + 2 = 0$$
$$Q_2 : z^2 - 2xz + 2z + 1 = 0 .$$

In particolare, si determinino le eventuali quadriche degeneri del fascio, e si determini il tipo affine di tutte le quadriche del fascio.

3) Si consideri in $\mathbb{R}^2$ un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O,x,y)$, e si indichino con X e Y rispettivamente l'asse x e l'asse y. Sia $\mathcal{A}$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A} := \{\emptyset\} \cup \{\{O\}\} \cup \{\, K_r \mid r \in \mathbb{R}_+ \,\} \cup \{K_\infty\} \cup \{\mathbb{R}^2\}$$

dove K_r $(r \in \mathbb{R}_+)$ e K_∞ sono definiti da

$$K_r := \big(\{0\} \times (-r,+r)\big) \cup \big((-r,+r) \times \{0\}\big) =$$
$$= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -r < y < +r \ \text{ oppure } \ -r < x < +r, y = 0 \,\}$$
$$K_\infty := X \cup Y .$$

Dimostrare che $\mathbb{A}$ è una topologia su $\mathbb{R}^2$.

4) Sia $\mathcal{A}_{\text{cof}}$ la topologia cofinita di $\mathbb{C}$, cioè la topologia di $\mathbb{C}$ i cui chiusi *non banali* sono tutti e soli i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{C}$. Calcolare l'interiore e la chiusura dei seguenti sottoinsiemi nello spazio topologico $\big(\mathbb{C}, \mathcal{A}_{\text{cof}}\big)$:

$$\{-3,-2,-1,0,+1,+2,+3\}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R},$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^5 = 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid z^{37} - 2z^{15} + 1 \neq 0\}.$$