GEOMETRIA III — 1999/2000

Prof. Stefano Trapani

Sessione estiva anticipata, 1^0 appello — 07/02/2000

. . . .

1) Ridurre a forma canonica di Jordan la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinare la retta r passante per il punto $P := [-3, 1, 2]$ e per il punto Q di intersezione tra la retta $s : x_0 - 3\,x_2 = 0$ e la retta $t : 2\,x_0 - x_1 - x_2 = 0$.

3) Nello spazio affine complesso $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$, si consideri la quadrica Q di equazione cartesiana $Q : x^2 + y^2 - z^2 - 6\,y + 9 = 0$.

(a) Determinare il tipo affine di Q .

(b) Detto $\mathfrak{F}$ il fascio di piani il cui asse è l'asse x, sia $\mathcal{C}(\pi) := Q \cap \pi$. Determinare il tipo affine della conica $\mathcal{C}(\pi)$ al variare di $\pi \in \mathfrak{F}$.

4) Si considerino $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come spazi topologici rispetto alle topologie naturali, e sia $\Phi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto [1, x_1, \dots, x_n]\,, \qquad \forall\,(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dimostrare che:

(a) Φ è iniettiva;

(b) Φ è continua;

(c) Φ è aperta;

(d) la restrizione $\Phi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \Phi\big(\mathbb{R}^n\big)$ è un omeomorfismo.