

GEOMETRIA 2 — 2004/2005

Prof. Mauro Nacinovich

2^a prova di esonero — 28/01/2005

.....

1) Si consideri in $V := \mathbb{R}^3$ la forma bilineare $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_A$ associata alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che \mathfrak{b} è non degenere.

(b) Calcolare una base ortogonale di (V, \mathfrak{b}) .

(c) Determinare l'indice di Witt $\nu(V)$ di (V, \mathfrak{b}) .

(d) Determinare una decomposizione di Witt di (V, \mathfrak{b}) , precisando una scelta opportuna del nucleo anisotropo e degli eventuali piani iperboliche.

(e) Determinare una base isotropa canonica per ciascuno dei piani iperboliche che eventualmente compaiano nella decomposizione in (d).

2) Sia Q la quadrica in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ di equazione cartesiana

$$Q : 3x^2 - 2xy + y^2 + 2xz + 4yz - 6x - 2z + 4 = 0.$$

(a) Determinare il tipo affine di Q .

(b) Se Q è una quadrica a centro, calcolare tale centro.

(c) Calcolare un'equazione cartesiana del piano τ tangente a Q nel punto $T := (1, -1, 1)$.

3) Sia \mathfrak{F} il fascio di coniche in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ generato da $\mathcal{C}_+ : x^2 - y^2 + 2x - 1 = 0$ e da $\mathcal{C}_- : xy + y - 1 = 0$.

(a) Descrivere tramite equazioni cartesiane tutte le coniche del fascio.

(b) Determinare il tipo affine di *tutte* le coniche — non degeneri, degeneri o vuote che siano — del fascio.