

Esonero III del corso di Geometria II N.O - 28 Gennaio 2003

Risolvere i seguenti esercizi dando brevi spiegazioni dei procedimenti e teoremi utilizzati.

Esercizio 1) Sia \mathcal{F} il fascio delle coniche di \mathbb{P}^2 passanti per il punto P , tangenti in P alla retta r e passanti per il punto $Q \notin r$.

a) Dopo aver notato che \mathcal{F} è uno spazio proiettivo di dimensione due, si determinino tutte le proiettività di \mathcal{F} che fissano due coniche distinte di \mathcal{F} .

b) Nella decomposizione $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup r$, considerando cioè r come retta all'infinito, si determini la dimensione del sottospazio di \mathcal{F} formato dalle iperboli e di quello formato dalle ellissi.

c) Sia s la retta che unisce P e Q e sia R un punto non contenuto in $r \cup s$. Dopo aver fissato opportune coordinate proiettive, si scriva l'equazione della conica di \mathcal{F} che è tangente a s in Q e passa per R .

Esercizio 2) Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$b((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$$

a) Verifica che b è una forma bilineare simmetrica.

b) calcolare l'indice di Witt di b .