GEOMETRIA 2 — 2004/2005

Prof. Mauro Nacinovich

1ª prova di esonero — 06/12/2004

....

1) Si consideri in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$ il fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di base la retta r di equazioni cartesiane $r : \begin{cases} 3\,x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Determinare equazioni cartesiane e parametriche di $\mathcal{F}_r$ come sottospazio proiettivo dello spazio proiettivo duale $\left(\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}\right)' := \mathbb{P}\Big(\left(\mathbb{Q}^3\right)'\Big)$.

2) Si considerino in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ le rette

$$r : \begin{cases} 2\,x_0 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_0 + x_1 + 3\,x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} 2\,x_0 + 6\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 = 0 \\ 3\,x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Dimostrare che r ed s sono complanari e distinte.

(b) Determinare la retta t del piano contenente r ed s, passante per $r \cap s$ e per il punto $P := (0:0:1:-1)$.

3) Si considerino in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ i punti $P_1 := (2,-1,3,4)$, $P_2 := (0,1,1,3)$ e $P_3 := (-2,1,5,-1)$, e il sottospazio affine $S := \overline{P_1 P_2 P_3}$ da essi generato. Sia inoltre r la retta di equazioni parametriche $r : \begin{cases} x = 2\,\lambda \\ y = -3 \\ z = -4\,\lambda + 4 \\ u = 4\,\lambda + 7 \end{cases} \quad \big(\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\big)$.

Determinare se esista un iperpiano π di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ che contenga S e sia parallelo ad r. In caso negativo, giustificare la risposta. In caso affermativo, precisare quanti di questi iperpiani esistano, e calcolare equazioni cartesiane e parametriche di uno di essi.

4) Determinare l'unica proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ che, ristretta ad $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$, mandi i punti di coordinata rispettivamente 3 , -1 e -2 nei punti di coordinata rispettivamente $-8/11$, $4/3$ e 7 .