I esonero di Geometria II N.O - 5 Novembre 2002

Risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio 1) Sia $\mathbb{A}^2$ uno spazio affine di dimensione 2 in cui è fissato un riferimento affine $(O; x, y)$. Siano $r_1 = \{x + y = 1\}$ e $r_2 = \{x + y = -1\}$ due rette affini.
1.a) Determinare tutti i morfismi affini di $\mathbb{A}^2$ in sé che trasformano i punti della retta r_1 in punti della retta $s_1 = \{x = y\}$ e i punti della retta r_2 in punti della retta $s_2 = \{x = -y\}$.
1.b) È possibile trovare un'affinità di $\mathbb{A}^2$ che abbia la proprietà di cui in 1.a) (motivare geometricamente la risposta se possibile)?
1.c) Se f è un morfismo affine con le proprietà di cui in 1.a), quale può essere la dimensione dello spazio affine $f(\mathbb{A}^2)$?
2) Determinare un morfismo affine f di $\mathbb{A}^2$ in sé tale che il giunto $f(r_1)f(r_2)$ abbia dimensione uno.

Esercizio 2) Siano $S := \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) : A$ è simmetrica$\}$ e $N := \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) : A$ è antisimmetrica$\}$.
1) Provare che S, N sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$.
2) Determinare la dimensione di N, trovare una sua base e una sua rappresentazione implicita.
3) Provare che S^0 è isomorfo a N.
4) Sia $L : S \to \mathbb{R}^2$ tale che $L(A) = (a_{11}, a_{22})$. Determinare una base di $S'/\mathrm{Im}(L')$.