CAPITOLO V

SPAZI AFFINI

§1 Sottospazi di uno spazio affine $\mathbb{K}^n_{\text{aff}}$

Esercizio 1.1 *In $\mathbb{R}^4_{\text{aff}}$ si considerino i punti $A = (1,1,0,1)$, $B = (0,2,1,1)$, $C = (0,0,3,-2)$. Si determini la dimensione del più piccolo sottospazio affine S che li contiene e se ne determini l'equazione in forma implicita.*

Lo spazio tangente $T(S)$ è generato dai vettori $\overrightarrow{AB} = {}^t(-1,1,1,0)$, $\overrightarrow{AC} = {}^t(-1,-1,3,-3)$. Poiché il determinante $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ è $\neq 0$, lo spazio tangente $T(S)$ ha dimensione due e quindi S è un piano affine in $\mathbb{R}^4_{\text{aff}}$.

I punti di S sono tutti e soli i punti $P = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4_{\text{aff}}$ per cui il vettore $\overrightarrow{AP} = {}^t(x-1, y-1, z, t-1)$ appartiene al piano lineare $T(S)$: essi sono quindi caratterizzati da:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z & 1 & 3 \\ t-1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Poiché il detererminante del minore formato dalle ultime due righe e colonne è $-3 \neq 0$, questa condizione equivale all'annullarsi dei determinanti dei due minori formati dalla prima e dalla seconda riga con le ultime due:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ z & 1 & 3 \\ t-1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -[3x+3z+2t-5] = 0, \\[2ex] \begin{vmatrix} y-1 & 1 & -1 \\ z & 1 & 3 \\ t-1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3y+3z+3t-1 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.2 *Si descriva in forma parametrica l'equazione della retta affine r di $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$ che passa per il punto $A = (-1,0,2)$ e il cui tangente è definito da*

$$T(r) = \left\{ {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0, \quad 2x-3y=0 \right\}\,.$$

Dobbiamo trovare un generatore $\mathbf{v}$ dello spazio vettoriale $T(r)$: l'equazione parametrica della retta sarà allora: ${}^t(x, y, z) = A + t\,\mathbf{v}$. Osserviamo che $T(r) = \mathbb{R} \cdot {}^t(3, 2, -5)$; quindi possiamo scrivere l'equazione parametrica di r nella forma:

$$\begin{cases} x = 3t - 1\,, \\ y = 2t\,, \\ z = -5t + 2\,, \\ t \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Esercizio 1.3 *In $\mathbb{R}^4_{\text{aff}}$ consideriamo la retta r di equazione parametrica*

$$(x, y, z, t) = (1 - \lambda, 2\lambda, 3 - 2\lambda, \lambda)$$

e i punti $A = (-1, -1, 2, 3)$, $B = (0, 2, -2, 1)$. Si determinino, in forma implicita, le equazioni del più piccolo sottospazio affine S che contenga $\{A, B\} \cup r$.

S è il più piccolo sottospazio affine che contenga A, B e due qualsiasi punti distinti di r. Dando al parametro λ il valore 0 troviamo il punto $C = (1, 0, 3, 0)$, con $\lambda = 1$ otteniamo $D = (0, 2, 1, 1)$. Il sottospazio vettoriale $T(S)$ è generato dai vettori $\overrightarrow{CA} = {}^t(-2, -1, -1, 3)$, $\overrightarrow{CB} = {}^t(-1, 2, -5, 1)$, $\overrightarrow{CD} = {}^t(-1, 2, -2, 1)$, cioè dalle colonne della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è ottenuta dalla M mediante operazioni elementari tra le colonne: le sue colonne sono quindi ancora generatori del sottospazio vettoriale $T(S)$. Poiché il determinante del minore delle prime tre righe è $15 \neq 0$, il rango di M, e quindi la dimensione di S, è uguale a 3. Quindi S è l'iperpiano formato da tutti i punti $P = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4_{\text{aff}}$ per cui $\overrightarrow{CP} = {}^t(x - 1, y, z - 3, t) \in T(S)$, tali cioè che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x - 1 \\ -2 & 5 & 0 & y \\ 2 & -6 & 1 & z - 3 \\ -1 & -1 & 0 & t \end{vmatrix} = 7x + y + 5t - 7 = 0\,.$$

Osserviamo che $T(S)$ contiene il vettore $\mathbf{e}_3 = {}^t(0, 0, 1, 0)$ e quindi l'iperpiano S è parallelo all'asse z: la sua equazione implicita si scrive quindi mediante un polinomio di primo grado indipendente dalla variabile z.

§2 Trasformazioni affini

Esercizio 2.1 *Si determini il gruppo $\mathbf{G}$ delle trasformazioni affini di $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$ che trasformano in sé la retta $r = \{(1 + t, 1 - t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e lasciano fisso il punto $A = (-1, 0, 1)$.*

Una $f \in \mathbf{G}$ si scriverà nella forma: $f(P) = A + \phi(\overrightarrow{AP})$ per una $\phi \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R})$. Osserviamo che $T(r)$ è la retta lineare generata dal vettore $\mathbf{u} = {}^t(1, -1, 2)$ e $B = (2, 0, 2) \in r$ (corrispondente al valore $t = 1$ del parametro). Dalla condizione che $f(r) = r$ ricaviamo che $\phi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ per un numero reale $\lambda \neq 0$. Posto $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = {}^t(3, 0, 1)$, abbiamo, per un numero $t \in \mathbb{R}$: $r \ni f(B) = A + \phi(\mathbf{v}) = B + t\,\mathbf{u} = A + \mathbf{v} + k\mathbf{u}$. Osserviamo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti. Possiamo completarli quindi ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo un vettore $\mathbf{w}$. Sarà ad esempio sufficiente scegliere $\mathbf{u} = {}^t(0, 0, 1)$. Allora l'endomorfismo ϕ si rappresenta nella base $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ nella forma di una matrice triangolare superiore:

$$[\phi]_{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \lambda & k & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, k, \lambda \in \mathbb{R}$ e $k \cdot \lambda \neq 0$. La matrice M di ϕ nella base canonica si ottiene risolvendo:

$$\begin{pmatrix} \lambda & k & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} M\,.$$

Abbiamo quindi

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & k & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.2 *Si determini il sottogruppo* $\mathbf{G}$ *del gruppo delle affinità* f *di* $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$ *tali che* $f(r_i) \subset r_i$ *per* $i = 1, 2, 3$, *ove le* r_i *sono le rette:*

$$\begin{aligned} r_1 &:= \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ r_2 &:= \{(1, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ r_3 &:= \{(-1, 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Osserviamo che $df(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$ e quindi dobbiamo cercare la f nella forma:

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + x_0 \\ y' = \lambda_2 y + y_0 \\ z' = \lambda_3 z + z_0\,. \end{cases}$$

Poiché $f(r_1) = r_1$, abbiamo $y' = z' = 0$ se $y = z = 0$ e quindi $y_0 = z_0 = 0$. Poi, da $f(r_2) = r_2$ e $f(r_3) = r_3$ otteniamo le

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + x_0 \\ -1 = -\lambda_1 + x_0 \end{cases}$$

che hanno come conseguenza $x_0 = 0$ e $\lambda_1 = 1$. Poiché $f(r_3) = r_3$ otteniamo poi

$$1 = \lambda_2$$

e quindi troviamo che f deve essere della forma:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \lambda\, z \end{cases}$$

al variare di λ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 2.3 Si dimostri che l'unica trasformazione affine di $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$ che trasformi in sé tre rette due a due sghembe è l'identità.

Siano r_1, r_2, r_3 le tre rette sghembe e siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, vettori tali che $T(r_i) = L(\mathbf{v}_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Allora $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Fissiamo un punto A_i su ciascuna retta r_i. La condizione che le tre rette siano due a due sghembe si può esprimere mediante: $\overrightarrow{A_iA_j} \notin L(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ se $1 \le i \ne j \le 3$. Possiamo allora supporre, fissando i punti A_1 e A_2 sulla parallela ad r_3 che interseca le due rette sghembe r_1 ed r_2, che $A_2 = A_1 + k_3\mathbf{v}_3$ e possiamo poi scegliere A_3 come punto d'intersezione di r_3 e del piano per r_1 parallelo ad r_2, in modo che $A_3 = A_1 + h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2$, per opportuni numeri reali k_3, h_1, h_2. Se f è una trasformazione affine di $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$ con $f(r_i) = r_i$, avremo $df(T(r_i)) = T(r_i)$ e quindi $df(\mathbf{v}_i) = \lambda_i\mathbf{v}_i$ per $i = 1, 2, 3$, per opportuni $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre $f(A_1) = A_1 + c\mathbf{v}_1$ per un $c \in \mathbb{R}$. Otteniamo allora:

$$f(A_2) = f(A_1 + k_3\mathbf{v}_3) = A_1 + c\mathbf{v}_1 + k_3\lambda_3\mathbf{v}_3 \in A_2 + L(\mathbf{v}_2) = A_1 + k_3\mathbf{v}_3 + L(\mathbf{v}_2)$$

e quindi $c = 0$ e $\lambda_3 = 1$. Abbiamo poi:

$$\begin{aligned} f(A_3) = f(A_1 + h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2) &= A_1 + h_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + h_2\lambda_2\mathbf{v}_2 \in A_3 + L(\mathbf{v}_3) \\ &= A_1 + h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + L(\mathbf{v}_3)\,, \end{aligned}$$

da cui si ricava che anche $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Quindi:

$$f(A_1 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) = f(A_1) + df(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) = A_1 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

dimostra che f è l'identità.

§3 Sottospazi sghembi

Esercizio 3.1 *Si verifichi che le due rette di $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$:*

$$\begin{aligned} r_1 &:= \{(t-1, 1-2t, 5+3t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ r_2 &:= \{(1-3t, 2+3t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

sono sghembe e si determini una retta r, con $T(r) = L({}^t(0,1,0))$ che intersechi entrambe.

Abbiamo: $A = (0, -1, 8) \in r_1$ (corrisponde a $t = 1$) e $T(r_1) = \mathbb{R}\,\mathbf{v}_1$ con $\mathbf{v}_1 = {}^t(1, -2, 3)$; $B = (0, 3, 0) \in r_1$ (corrisponde a $t = 1/3$) e $T(r_2) = \mathbb{R}\,\mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_2 =$

${}^t(-1,1,0)$. La condizione che le due rette siano sghembe equivale al fatto che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{AB}$ siano linearmente indipendenti, cioè che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) = -4 \neq 0 \,.$$

La retta r cercata è l'intersezione del piano π_1 passante per la retta r_1 e parallelo alla direzione $\mathbf{e}_2 = {}^t(0,1,0)$ e del piano π_2 passante per la retta r_2 e parallelo alla direzione $\mathbf{e}_2 = {}^t(0,1,0)$. Poiché $T(\pi_1) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2)$ e $T(\pi_2) = L(\mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2)$, le equazioni dei due piani sono rispettivamente:

$$\pi_1 : = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -2 & 1 & y+1 \\ 3 & 0 & z-8 \end{vmatrix} = z - 3x - 8 = 0$$

$$\pi_2 : = \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y-3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = -z = 0$$

La retta cercata è quindi:

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -\frac{8}{3},\ z = 0\} \,.$$

Esercizio 3.2 *Si considerino le due rette di $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$:*

$$r_1 := \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

ed

$$r_2 := \{(t-1, 1-3t, 2t+5) \mid t \in \mathbb{R}\} \,.$$

Si verifichi che sono sghembe e se ne determini la relativa distanza. È $B = (0,-2,7) \in r_2$ (corrisponde al valore del parametro $t = 1$) e $T(r_2) = \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_2 = {}^t(1,-3,2)$. I vettori di $T(r_1)$ sono le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

e quindi $T(r_1) = \mathbb{R} \cdot \mathbf{v}_1$ con $\mathbf{v}_1 = {}^t(1,-5,-2)$. Si verifica poi facilmente che r_1 interseca il piano $z = 0$ nel punto $A = (1,0,0)$.

La distanza tra le rette è la lunghezza del segmento perpendicolare sia ad r_1 che ad r_2 che ha estremi nei punti di intersezione con le due rette. Determiniamo la direzione del segmento: essa sarà data dal prodotto vettore[1] $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = {}^t(-16,-4,2)$.

[1]Dati due vettori $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n)$ e $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^n)$ di $\mathbb{R}^n$ denotiamo con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u^i v^i$ il loro *prodotto scalare*. Se $n = 3$, possiamo definire anche il loro *prodotto vettore* $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ come il vettore $\mathbf{u} = {}^t(u^2v^3 - u^3v^2, u^3v^1 - u^1v^3, u^1v^2 - u^2v^1)$.

Non è necessario calcolare esplicitamente il segmento di perpendicolare tra r_1 ed r_2. Infatti la distanza tra le due rette si ottiene misurando la lunghezza della proiezione di un qualsiasi segmento che unisce le due rette sulla direzione perpendicolare alle due rette, ed è quindi uguale al valore assoluto del prodotto scalare di $\overrightarrow{AB} = {}^t(-1, -2, 7)$ con il versore $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ di $\mathbf{u}$ e quindi è:

$$\text{distanza tra } r_1 \text{ ed } r_2 = \left| \frac{\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\mathbf{u}\|} \right| = \frac{19}{\sqrt{69}}\,.$$

Le due rette r_1 ed r_2 sono sghembe perché $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti e la loro distanza è $\neq 0$.

Esercizio 3.3 *Si considerino in $\mathbb{R}^3_{\text{aff}}$ le due rette:*

$$r_1 := \{(2-3t, 5+6t, 3t-9) \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$r_2 := \begin{cases} 3x - 6y + 7z = 5 \\ 2x + y + z = 10 \end{cases}$$

e si determini una retta r per l'origine $O = (0,0,0)$ che intersechi entrambe.

Ricaviamo le equazioni implicite della retta r_1 eliminando il parametro dalle coppie di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 + 6t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 2 - 3t \\ z = 3t - 9\,. \end{cases}$$

Otteniamo:

$$r_1 := \begin{cases} 2x + y = 9 \\ x + z = -7\,. \end{cases}$$

La retta cercata è l'intersezione dei piani $\pi_1 := \overline{Or_1}$ e $\pi_2 := \overline{Or_2}$. Le equazioni si determinano determinando per ciascuno dei fasci di piani passanti per la retta r_i quella che passa per il punto 0: essa si ottiene eliminando i termini noti tra le due equazioni dei sistemi che definiscono le rette.

Abbiamo quindi:

$$\pi_1 := 7(2x+y) + 9(x+z) = 23\,x \,+\, 7\,y \,+\, 9\,z \,=\, 0$$
$$\pi_2 := 2(3x - 6y + 7z) - (2x + y + z) = 4\,x \,-\, 13\,y \,+\, 13\,z \,=\, 0$$

e dunque la retta cercata è

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 := \begin{cases} 23\,x \,+\, 7\,y \,+\, 9\,z \,=\, 0 \\ 4\,x \,-\, 13\,y \,+\, 13\,z \,=\, 0\,. \end{cases}$$