

## GEOMETRIA 2 — 2004/2005

*Prof. Mauro Nacinovich*

Appello del 27-09-2005

.....

1) Si consideri lo spazio proiettivo  $\mathbb{RP}^4$ , e in esso il sottospazio  $S$  di equazioni cartesiane

$$S : \begin{cases} 3x_0 + x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_0 - x_1 - x_2 = 0 \\ 5x_0 - 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si trovi una descrizione parametrica di  $S$ .
- (b) Sia  $\mathcal{V}$  il fascio d'iperpiani di base  $S$ . Si trovino equazioni parametriche e cartesiane di  $\mathcal{V}$ , come sottovarietà proiettiva dello spazio proiettivo duale  $(\mathbb{RP}^4)'$ .

2) Sullo spazio vettoriale  $V := \mathbb{R}^3$ , si consideri la forma bilineare  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_M$  associata alla matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia  $\mathcal{C} : x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_0x_2 = 0$  la conica del piano proiettivo reale  $\mathbb{RP}^2$  associata alla forma  $\mathfrak{b}$ .

- (a) Si determinino il rango, l'indice di Witt e la segnatura della forma  $\mathfrak{b}$ .
- (b) Si trovi una decomposizione di Witt di  $(V, \mathfrak{b})$ , precisando una scelta opportuna del nucleo anisotropo e degli eventuali piani iperbolici.
- (c) Si determini il tipo delle tre coniche affini (in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ ):  
 $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C} \setminus \{x_0 = 0\}$ ,  $\mathcal{C}_1 := \mathcal{C} \setminus \{x_1 = 0\}$ ,  $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C} \setminus \{x_2 = 0\}$ .

3) Si determini, se esiste, una proiettività della retta proiettiva razionale  $\mathbb{QP}^1$  in sé tale che

$$[2, 6] \mapsto [5, 8], \quad [-1, 1] \mapsto [1, -4], \quad [3, 2] \mapsto [8, 3].$$

Quante di tali proiettività esistono? Perché?

4) Dati i punti  $P_1 := [0, 3]$ ,  $P_2 := [2, -2]$  e  $P_3 := [1, 5]$  della retta proiettiva razionale  $\mathbb{QP}^1$ , si determini, se possibile, un quarto punto  $P$  di  $\mathbb{QP}^1$  tale che  $(P_1, P_2, P_3, P)$  sia una quaterna armonica.

Quanti di tali punti esistono? Perché?