III appello di Geometria II - 25 Febbraio 2003

Risolvere i seguenti esercizi dando brevi spiegazioni dei procedimenti e teoremi utilizzati.

Esercizio 1) Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso V di dimensione n.
1) Provare che se $T^n = I$ allora T è diagonalizzabile.
2) Trovare tutte le classi di coniugio di T nel caso in cui $T^{n-1} \neq I$ e $T^n = I$.

Esercizio 2) Sia $(\mathbb{R}^2, (x, y))$ il piano affine reale.
1) Determinare la famiglia $\mathcal{F}$ formata dalle ellissi che sono tangenti alla parabola $y = x^2$ in $(0, 0)$ e che sono tangenti alla retta $y - x = 1$ in $(0, 1)$.
2) Esistono circonferenze appartenenti alla famiglia $\mathcal{F}$?

Esercizio 3) Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ una matrice simmetrica $n \times n$ definita negativa. Sia $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ la matrice simmetrica $n \times n$ definita nel modo seguente:

$$a'_{ij} = a_{ij} \text{ per } (i, j) \neq (n, n),$$

$$a'_{nn} = a_{nn} - 1.$$

Provare che A' è definita negativa.